


UM MODELO SIMPLES PARA A REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO  
NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE

LAURO HENRIQUE MELLO CHUEIRI

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

APROVADA POR:

  
PROF. NELSON FRANCISCO F. EBECKEN  
(PRESIDENTE)

  
PROF. EDISON C. PRATES DE LIMA

  
PROF. LUIZ LANDAU

  
PROF. ANDRÉS LUDOVICO HALBRITTER

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 1985

CHUEIRI, LAURO HENRIQUE MELLO

Um Modelo Simples para a Representação do Comportamento Não-Linear de Estruturas de Superfície (Rio de Janeiro) 1985.

viii, 115 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1985)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Análise Não-Linear de Cascas, Elementos Finitos.

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série)



## AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que ajudaram a tornar possível este trabalho.

Sou especialmente grato ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken, meu orientador, por seu estímulo e orientação em todos os estágios deste trabalho.

Aos professores, funcionários e colegas da COPPE/CIVIL estendo meus agradecimentos pela amizade que a mim dedicaram durante o tempo que permanecemos juntos.

Sou grato à Fundação Educacional de Bauru e à CAPES, através do Programa Institucional de Capacitação de Docentes, por garantirem o apoio financeiro ao longo do curso.

Agradeço a Eneida de Almeida Mendonça pelo esmerado trabalho de datilografia, e ao colega Marco Antonio Corbucci Caldeira pela elaboração gráfica deste trabalho.

Finalmente, e de modo especial, agradeço a minha esposa Vanilda Miziara Mello Chueiri que jamais faltou com seu apoio, estímulo e dedicação ao longo de todo o curso.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UM MODELO SIMPLES PARA A REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO  
NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE

Lauro Henrique Mello Chueiri

Fevereiro de 1985

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho, aplica-se o Método dos Elementos Finitos à análise do comportamento não-linear geométrico e físico de estruturas de superfície delgadas.

Na análise de não-linearidade geométrica, aplica-se a formulação derivada das equações de von Kármán específica para problemas de grandes deflexões e pequenas deformações.

Para consideração de não-linearidade física, utiliza-se uma formulação simplificada, baseada no critério de von Mises, que representa o comportamento elasto-plástico a partir dos esforços da superfície média da estrutura.

Os resultados de exemplos numéricos, comparações com outros modelos e conclusões são apresentados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A SIMPLE APPROACH TO THE NON-LINEAR  
ANALYSIS OF SHELL STRUCTURES

Lauro Henrique Mello Chueiri

February, 1985

Chairman: Nelson Francisco Favilla Ebecken  
Department: Civil Engineering

In this work, the formulation of the large deflection behaviour of elastic-plastic shells is given and numerical solutions are obtained using the finite element method.

A modification is used for von Mises's approximate yield criterion for thin shells. This modification includes the strain hardening effects and makes the yield criterion more suitable for use in the collapse analysis of thin steel plates and shells under buckling loads.

Illustrative examples are included and the results are compared with the results of other formulations.

## ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - O ELEMENTO TRIANGULAR PLANO PARA ANÁLISE LINEAR	4
II.1 - Sistema de Referência	4
II.2 - Formação da Matriz de Rigidez do Elemento	7
II.3 - Transformação da Matriz de Rigidez do Elemento	19
II.4 - Matriz de Massa do Elemento	22
III - NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA	29
III.1 - Problemas Não-Lineares	29
III.2 - Formulação de Grandes Deflexões	31
III.3 - Integração Numérica	42
IV - NÃO-LINEARIDADE FÍSICA	45
IV.1 - Teoria Matemática da Plasticidade	45
IV.2 - Critérios de Escoamento para Cascas Delgadas	58
IV.3 - Determinação das Matrizes Elasto-Plásticas	67
IV.4 - Equações Elasto-Plásticas para Grandes Deflexões	76
V - RESULTADOS DE ANÁLISES	79
V.1 - Análise Estática	80
a) Não-linearidade geométrica	80

b) Não-linearidade física	86
V.2 - Análise Dinâmica	98
a) Frequências naturais	98
b) Não-linearidade física	103
VI - CONCLUSÕES	107
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	109



## I - INTRODUÇÃO

A aplicação do Método dos Elementos Finitos na solução de problemas não lineares tem despertado grande interesse na engenharia. Ao longo dos últimos anos, diversas aproximações vêm sendo desenvolvidas, dando-se maior ênfase à avaliação de não-linearidade física e geométrica em estruturas laminares.

Na análise dessas estruturas, basicamente, são empregados elementos planos na discretização de forma facetada, elementos curvos, ou elementos isoparamétricos derivados a partir de teorias tridimensionais [ 1 ]. A implementação de modelos que avaliam o comportamento não linear, através desses elementos, tem sido objeto de diversas pesquisas.

Particularmente, o uso de elementos finitos isoparamétricos para grandes deformações e plasticidade, primeiramente apresentado por NAYAK [ 2 ], está atualmente consagrado. Também os elementos finitos degenerados de elementos tridimensionais, por não apresentarem restrições com relação a teorias tridimensionais, são largamente aplicados em análise de cascas delgadas e moderadamente espessas [ 3 ], [ 4 ].

A análise de não-linearidade, porém, acarreta um grande esforço computacional e, muitas vezes, conduz a dificuldades de

formulações. Isso justifica a ampla utilização de elementos planos encontrados na literatura, apesar de suas limitações.

A partir de um elemento extremamente simples, porém eficiente na análise linear, desenvolve-se nesse trabalho a implementação de não-linearidade geométrica e física aplicadas a estruturas laminares delgadas.

O elemento é triangular plano, com três pontos nodais, e formado pela superposição dos comportamentos de membrana e de flexão. Para isso, associa-se o elemento mais simples para análise de estado plano de tensão, onde os deslocamentos variam linearmente sobre o elemento (conhecido na literatura como TRIM3), ao elemento não conforme, de flexão de placas (T9), desenvolvido por Holand e Bell.

No Capítulo II, determinam-se as matrizes de rigidez desse elemento, para a análise linear, bem como as matrizes de massa consistentes e discretas para a análise dinâmica.

No terceiro capítulo, desenvolve-se uma formulação de grandes deflexões para estruturas delgadas, baseada nas equações de von Kármán. A escolha da integração numérica, para problemas não lineares, é também incluída.

O desenvolvimento do elemento para consideração de não-linearidade física está no Capítulo IV. Partindo da superfície de escoamento de Ilyushin, faz-se o estudo do comportamento elasto-plástico utilizando-se uma solução a partir de determinação dos esforços na superfície média da estrutura; considera-se, também, nesse estudo, a possibilidade de endurecimento do material. Conclui-se o capítulo com a determinação das matrizes para o

efeito em conjunto das duas não-linearidades.

O Capítulo V mostra os resultados de análises e comparações com outras formulações. As conclusões sobre o estudo efetuado, estão no último capítulo.

Os procedimentos automáticos foram programados, para a análise isolada de não-linearidades física e geométrica, em linguagem ALGOL para implementação no sistema LORANE-NL [ 5 ].

## II - O ELEMENTO TRIANGULAR PLANO PARA ANÁLISE LINEAR

O elemento triangular plano é formado pela associação do elemento de estado plano de tensões com o elemento de flexão de placas [7]. No sistema local, portanto, o elemento possui cinco incógnitas por nó ( $U, V, W, \theta_x, \theta_y$ ), sendo que no sistema global, genericamente possui seis incógnitas nodais ( $U, V, W, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ ).

### II.1 - SISTEMA DE REFERÊNCIA

Os eixos  $X, Y$  e  $Z$  formam o sistema global, que representa as coordenadas nodais da estrutura, conforme Figura (II.1).

O sistema local formado pelos eixos  $x, y$  e  $z$ , tem origem no nó 1 do elemento, sendo o eixo  $x$  paralelo ao segmento 2-3 com sentido de 2 para 3; o eixo  $z$  é normal ao plano do elemento, e tem o mesmo sentido do vetor rotação correspondente à sequência 1-2-3. O triedo  $x, y, z$  é direto.

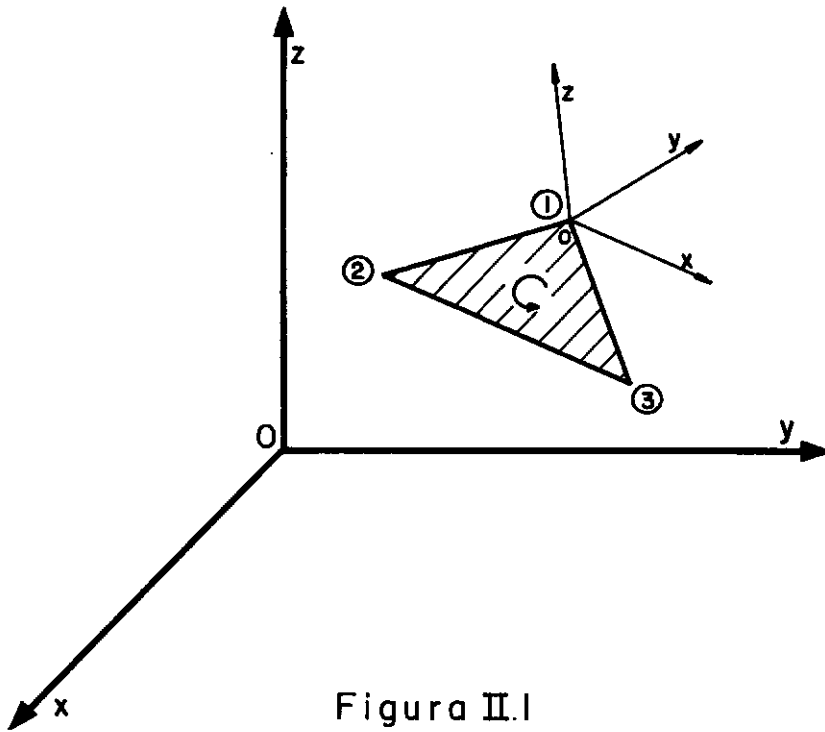


Figura II.1

Sendo os vetores de coordenadas nodais nos sistemas global e local, respectivamente:

$$\underline{X}_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{x}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad , \text{ com } i = 1, 2, 3,$$

pode-se escrever a relação:

$$\underline{X}_i = \underline{X}_1 + \underline{L} \cdot \underline{x}_i \quad (\text{II.1})$$

onde  $\underline{X}_1$  contém as coordenadas do nó 1 no sistema global e  $\underline{L}$  é a matriz de transformação dada por:

$$\underline{L} = [\underline{\ell}_x \ \underline{\ell}_y \ \underline{\ell}_z] \quad (\text{II.2})$$

sendo  $\underline{\ell}_x$ ,  $\underline{\ell}_y$  e  $\underline{\ell}_z$  os vetores que contêm os cossenos diretores de  $ox$ ,  $oy$  e  $oz$ , respectivamente.

Introduzindo a notação  $\underline{X}_{ij} = \underline{X}_i - \underline{X}_j$ , com  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ , então:

$$\underline{\ell}_x = \frac{1}{d_{23}} \cdot \underline{X}_{32} \quad (\text{II.3})$$

onde  $d_{23}$  é o comprimento do lado 2-3 e é dado por:

$$d_{23} = \sqrt{\underline{X}_{32}^T \cdot \underline{X}_{32}} = \sqrt{(X_{32})^2 + (Y_{32})^2 + (Z_{32})^2} \quad (\text{II.4})$$

Como  $oz$  é perpendicular ao plano do elemento, tem-se:

$$\underline{\ell}_z = \frac{1}{2A} \cdot \underline{X}_{32} \wedge \underline{X}_{12} , \quad (\text{II.5})$$

onde  $A$  é a área do triângulo.

Portanto, o vetor  $\underline{\ell}_z$  será:

$$\underline{\ell}_z = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} Y_{32} Z_{12} - Z_{32} Y_{12} \\ Z_{32} X_{12} - X_{32} Z_{12} \\ X_{32} Y_{12} - Y_{32} X_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

O vetor  $\underline{\ell}_y$  é determinado por:

$$\underline{\ell}_y = \underline{\ell}_z \wedge \underline{\ell}_x , \quad (\text{II.7})$$

e tem módulo unitário, pois  $\underline{\ell}_z$  e  $\underline{\ell}_x$  já são unitários.

Como  $\underline{L}$  é ortogonal, tem-se que  $\underline{L}^{-1} = \underline{L}^T$  e, portanto, de (II.1), determinam-se as coordenadas no sistema local, através de:

$$\underline{x}_i = \underline{L}^T \cdot (\underline{X}_i - \underline{X}_1) \quad (II.8)$$

## II.2 - FORMAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

O elemento está sujeito, simultaneamente, a um estado de membrana e de flexão. No sistema local, tem-se os deslocamentos nodais:

$$\underline{\delta}_i = \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_i^M \\ \underline{\delta}_i^F \end{Bmatrix}, \text{ sendo } \underline{\delta}_i^M = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \text{ e } \underline{\delta}_i^F = \begin{Bmatrix} W_i \\ \theta x_i \\ \theta y_i \end{Bmatrix}, \text{ para } i = 1, 2, 3 \quad (II.9)$$

esquematizados na Figura (II.2).

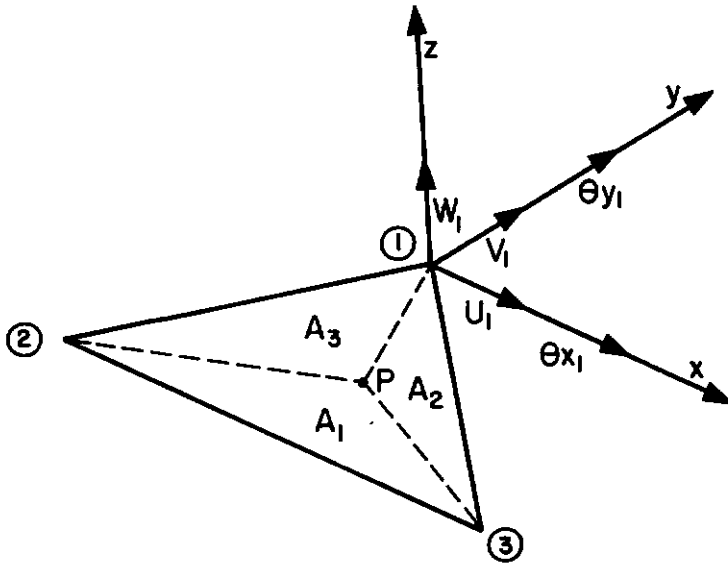


Figura II.2

O campo de deslocamento assumido será:

$$U = C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2 + C_3 \xi_3$$

$$V = C_4 \xi_1 + C_5 \xi_2 + C_6 \xi_3$$

$$W = C_7 \xi_1 + C_8 \xi_2 + C_9 \xi_3 + C_{10} \xi_1 \xi_2 + C_{11} \xi_2 \xi_3 + C_{12} \xi_1 \xi_3 +$$

$$C_{13} (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_2 \xi_1^2) + C_{14} (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_3 \xi_2^2) + C_{15} (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_1 \xi_3^2)$$

(II.10)

onde  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  são as coordenadas naturais definidas por:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \text{ e } \xi_3 = \frac{A_3}{A},$$

com as áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  mostradas na Fig. (II.2) para um ponto P qualquer.

As coordenadas de um ponto qualquer serão então defini-



das por  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ , que podem ser facilmente relacionadas às coordenadas locais  $(x, y)$ , através de:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.11})$$

ou, por inversão, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} & (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ y_{31} & x_{13} & (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ y_{12} & x_{21} & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.12})$$

onde  $x_{ij} = x_i - x_j$  e  $y_{ij} = y_i - y_j$ .

As relações entre as derivadas serão dadas por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.13})$$

ou

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.14})$$

sendo

$$\tilde{J}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} \\ x_{32} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

a inversa da matriz Jacobiana.

As integrais de área para polinômios em coordenadas naturais do tipo:

$$I = \int_A \xi_1^m \xi_2^n \xi_3^p dA ,$$

são calculadas por:

$$I = 2A \frac{m! n! p!}{(m + n + p + 2)!} , \text{ com } dA = 2A d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{II.16})$$

### **MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO**

Como foi visto em (II.10), o campo de deslocamento para o estado plano de tensão é dado por:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \cdot \underline{\delta}_i^M \quad (\text{II.17})$$

As deformações  $\underline{\epsilon}$  são expressas em função dos deslocamentos nodais através de:

$$\epsilon = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{array} \right\} = \underline{B1} \cdot \delta_{\sim 1}^M, \quad (\text{II.18})$$

com

$$\underline{B1} = \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Portanto, a matriz de rigidez do elemento é avaliada pela seguinte integral:

$$\underline{K_m} = \int_V \underline{B1}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B1} \cdot dV \quad (\text{II.20})$$

onde  $\underline{D}$  é a matriz de relação entre tensões e deformações, que para materiais isótropos, tem a forma:

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Como as matrizes têm elementos constantes, e sendo "t" a espessura de um elemento, a equação (II.20) resulta em:

$$\underline{\underline{K}}_m = \underline{\underline{B}}_1^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}}_1 \cdot A \cdot t \quad (\text{II.22})$$

### MATRIZ DE RIGIDEZ PARA FLEXÃO DE PLACAS

Os deslocamentos nodais para flexão de placas, conforme a equação (II.9), são a componente  $W$ , e as rotações  $\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y}$  e  $\theta_y = - \frac{\partial W}{\partial x}$ .

Podem-se relacionar então, os momentos flettores às curvaturas, através de:

$$\underline{\underline{m}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{k}} \quad (\text{II.23})$$

sendo:

$$\underline{\underline{m}} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\underline{k}} = \begin{Bmatrix} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

e como os momentos são decorrentes da integração das tensões ao longo da espessura do elemento, obtém-se:

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} = \frac{t^3}{12} \underline{\underline{D}} \quad (\text{II.25})$$

Com a equação (II.14), é possível uma relação entre as derivadas segundas em relação a  $x$  e  $y$ , com as coordenadas naturais  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , através de:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \end{bmatrix} \cdot (\underline{\underline{J}}^{-1})^T \quad (\text{II.26})$$

O cálculo do vetor  $\underline{k}$  é efetuado através do vetor  $\underline{k}_n$  de curvaturas, em relação as coordenadas naturais, definido por:

$$\underline{k}_n = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} \\ - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} \\ - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \end{array} \right\} \quad (\text{II.27})$$

e tendo em vista (II.26). Obtém-se, então:

$$\underline{k} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{k}_n, \quad (\text{II.28})$$

sendo a matriz  $\underline{\underline{T}}$ , dada por:

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{4A^2} \cdot \begin{bmatrix} y_{23}^2 & y_{31}^2 & 2 y_{31} y_{23} \\ x_{32}^2 & x_{13}^2 & 2 x_{13} x_{32} \\ 2 x_{32} y_{23} & 2 x_{13} y_{31} & 2 (x_{13} y_{23} + x_{32} y_{31}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

O deslocamento  $W$  da equação (II.10), pode ser escrito em

forma matricial, como:

$$\underline{W} = \underline{\phi} \cdot \underline{\alpha} \quad , \quad (\text{II.30})$$

onde  $\underline{\phi}$  contém as funções de interpolação, e  $\underline{\alpha}$  é o vetor de deslocamentos generalizados, expresso pelas constantes da equação (II.10).

Desta forma, relaciona-se o vetor  $\underline{k}_n$  aos deslocamentos generalizados, com:

$$\underline{k}_n = \underline{F} \cdot \underline{\alpha} \quad , \quad (\text{II.31})$$

sendo:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \xi_2 & -2 \xi_2 & 6 (\xi_1 - \xi_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \xi_1 & -6 (\xi_2 - \xi_3) & 2 \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 (\xi_1 - \xi_2) & -2 (2 \xi_2 - \xi_3) & 2 (2 \xi_1 - \xi_3) \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Levando (II.31) na equação (II.28), determina-se o vetor de curvatura em função dos deslocamentos generalizados:

$$\underline{k} = \underline{T} \cdot \underline{F} \cdot \underline{\alpha} \quad (\text{II.33})$$

Deve-se agora obter os deslocamentos generalizados em função dos deslocamentos nodais do elemento. De (II.30), constrói-se o vetor  $\underline{\delta}_n$ , que contém  $W$  e as derivadas de  $W$  em relação a  $\xi_1$  e  $\xi_2$ :

$$\underline{\delta n} = \left\{ \begin{array}{c} W \\ \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \end{array} \right\} = \underline{\phi n} \cdot \underline{\alpha} , \quad (\text{II.34})$$

onde:

$$\underline{\phi n} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_1 \xi_2 & \xi_2 \xi_3 & \xi_1 \xi_3 & (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_2 \xi_1^2) & \dots \\ 1 & 0 & -1 & \xi_2 & -\xi_2 & (-\xi_1 + \xi_3) & (\xi_2^2 - 2 \xi_1 \xi_2) & \dots \\ 0 & 1 & -1 & \xi_1 & (-\xi_2 + \xi_3) & -\xi_1 & (-\xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_2) & \dots \\ & & & (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_3 \xi_2^2) & (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_1 \xi_3^2) & & & \\ & & & (\xi_2^2 - 2 \xi_2 \xi_3) & (-\xi_1^2 + 4 \xi_1 \xi_3 - \xi_3^2) & & & \\ & & & (\xi_3^2 - 4 \xi_2 \xi_3 + \xi_2^2) & (-\xi_1^2 + 2 \xi_3 \xi_1) & & & \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

Particularizando a equação (II.34) para os pontos nodais, tem-se:

$$\underline{\delta n}_i = \underline{\phi}_0 \cdot \underline{\alpha} , \quad \text{com } i = 1, 2, 3 , \quad (\text{II.36})$$

onde,  $\underline{\delta n}_i$  contém os vetores  $\underline{\delta n}$  nos pontos nodais, e  $\underline{\phi}_0$  contém os valores de  $\underline{\phi n}$  também para esses pontos.

De (II.36), obtém-se:

$$\underline{\alpha} = \underline{\phi}_0^{-1} \cdot \underline{\delta n}_i , \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \quad (\text{II.37})$$

Através da equação (II.13), é possível escrever:

$$\delta \underline{n}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_{13} & y_{13} \\ 0 & x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} W \\ \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{array} \right\}_i, \quad (\text{II.38})$$

e como:

$$\left\{ \begin{array}{c} W \\ \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{array} \right\}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta_{i1}^F, \text{ para } i = 1, 2, 3, \quad (\text{II.39})$$

substituindo (II.39) e (II.38) em (II.37), obtém-se a matriz  $\underline{U}$  que relaciona os deslocamentos generalizados aos deslocamentos nodais (vide referência [ 7 ]):

$$\underline{\alpha} = \underline{U} \cdot \delta_{i1}^F, \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (\text{II.40})$$

Levando (II.40) em (II.33), tem-se

$$\underline{k} = \underline{T} \cdot \underline{F} \cdot \underline{U} \cdot \delta_{i1}^F \quad (\text{II.41})$$

ou seja:

$$\underline{k} = \underline{B2} \cdot \delta_{i1}^F \quad (\text{II.42})$$



chegando-se então à matriz  $\underline{B2}$  que relaciona a curvatura aos deslocamentos nodais:

$$\underline{B2} = \underline{T} \cdot \underline{F} \cdot \underline{U} \quad (\text{II.43})$$

Portanto, como já foi feita a integração ao longo da espessura do elemento, a matriz de rigidez será:

$$\underline{Kf} = \int_A \underline{B2}^T \cdot \underline{DB} \cdot \underline{B2} \cdot dA \quad (\text{II.44})$$

#### SUPERPOSIÇÃO DOS EFEITOS DE MEMBRANA E FLEXÃO

Após a determinação da matriz  $\underline{Km}$  devido ao estado plano de tensões, e a matriz  $\underline{Kf}$  para flexão de placas, pode-se compor as duas matrizes para a determinação da matriz de rigidez  $\underline{K}$  do elemento.

Para o estado de membrana pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \end{Bmatrix}_i = \underline{Km} \cdot \underline{\delta}_i^M, \text{ para } i = 1, 2, 3, \quad (\text{II.45})$$

e, para flexão de placas, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Fz \\ Mx \\ My \end{Bmatrix}_i = \underline{Kf} \cdot \underline{\delta}_i^F, \text{ para } i = 1, 2, 3, \quad (\text{II.46})$$

onde

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_i$$

são os vetores que contêm as forças nodais equivalentes.

As equações (II.45) e (II.46) são reescritas, dividindo as matrizes  $\underline{K}_m$  e  $\underline{K}_f$  em nove submatrizes, equivalentes a  $i=1,2,3$ :

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^m & \underline{K}_{12}^m & \underline{K}_{13}^m \\ \underline{K}_{21}^m & \underline{K}_{22}^m & \underline{K}_{23}^m \\ \underline{K}_{31}^m & \underline{K}_{32}^m & \underline{K}_{33}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}_i \quad (\text{II.47})$$

e

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^f & \underline{K}_{12}^f & \underline{K}_{13}^f \\ \underline{K}_{21}^f & \underline{K}_{22}^f & \underline{K}_{23}^f \\ \underline{K}_{31}^f & \underline{K}_{32}^f & \underline{K}_{33}^f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i \quad (\text{II.48})$$

Para o elemento, os deslocamentos nodais no sistema global, genericamente, são:

$$\underline{\delta}_i = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \theta x_i \\ \theta y_i \\ \theta z_i \end{Bmatrix}, \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (\text{II.49})$$

Desta forma, a matriz de rigidez do elemento  $\underline{K}$  será composta pelas submatrizes de  $\underline{K}_m$  e  $\underline{K}_f$ , ordenadas segundo os deslocamentos  $\underline{\delta}_i$ ; segue-se então que:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^m & \underline{0} & \underline{K}_{12}^m & \underline{0} & \underline{K}_{13}^m & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_{11}^f & \underline{0} & \underline{K}_{12}^f & \underline{0} & \underline{K}_{13}^f \\ & & 0 & & 0 & \\ \underline{K}_{21}^m & \underline{0} & \underline{K}_{22}^m & \underline{0} & \underline{K}_{23}^m & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_{21}^f & \underline{0} & \underline{K}_{22}^f & \underline{0} & \underline{K}_{23}^f \\ & & 0 & & 0 & \\ \underline{K}_{31}^m & \underline{0} & \underline{K}_{32}^m & \underline{0} & \underline{K}_{33}^m & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_{31}^f & \underline{0} & \underline{K}_{32}^f & \underline{0} & \underline{K}_{33}^f \\ & & 0 & & 0 & \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

### II.3 - TRANSFORMAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Denotando-se por  $\underline{F}_i$  o vetor que contém as forças nodais equivalentes, sendo  $\underline{\delta}_i$  os deslocamentos nodais do elemento e  $\underline{K}$  a matriz de rigidez do elemento, conforme (II.50), no sistema

local tem-se:

$$\underline{\bar{F}}_i = \underline{K} \cdot \underline{\delta}_i, \text{ com } i = 1, 2, 3. \quad (\text{II.51})$$

Pode-se obter a transformação da matriz de rigidez para o sistema global, através da mudança de coordenadas dos deslocamentos e forças equivalentes. Se  $\underline{R}$  é a matriz que relaciona os deslocamentos de um nó no sistema global com os mesmos deslocamentos no sistema local, tem-se:

$$\underline{\bar{\delta}}_i = \underline{R} \cdot \underline{\delta}_i \quad (\text{II.52})$$

onde  $\underline{\bar{\delta}}_i$  e  $\underline{\delta}_i$  são os vetores deslocamentos nos respectivos sistemas, para o nó  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), e

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{L} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

onde  $\underline{L}$  é a matriz de transformação dada por (II.2).

Logo, para os três nós do elemento, tem-se

$$\underline{\bar{\delta}}_i = \underline{M}^T \cdot \underline{\delta}_i, \text{ com } i = 1, 2, 3, \quad (\text{II.54})$$

com:

$$\underline{M}^T = \begin{bmatrix} \underline{R} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{R} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{R} \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

Sendo  $\underline{M_T}$  uma matriz de rotação, e, portanto ortogonal, segue-se que  $\underline{M_T}^{-1} = \underline{M_T}^T$ ; logo da equação (II.54), pode-se determinar

$$\underline{\delta}_i = \underline{M_T}^T \cdot \underline{\bar{\delta}}_i, \text{ com } i = 1, 2, 3. \quad (\text{II.56})$$

Substituindo (II.56) em (II.51), tem-se:

$$\underline{F}_i = \underline{K} \cdot \underline{M_T}^T \cdot \underline{\bar{\delta}}_i, \text{ com } i = 1, 2, 3. \quad (\text{II.57})$$

Pré-multiplicando (II.57) por  $\underline{M_T}$ , vem:

$$\underline{M_T} \underline{F}_i = \underline{M_T} \cdot \underline{K} \cdot \underline{M_T}^T \cdot \underline{\bar{\delta}}_i, \text{ com } i = 1, 2, 3. \quad (\text{II.58})$$

A equação (II.58) é a mesma relação dada em (II.51), em relação ao novo referencial, ou seja:

$$\underline{\bar{F}}_i = \underline{K_G} \cdot \underline{\bar{\delta}}_i, \text{ com } i = 1, 2, 3, \quad (\text{II.59})$$

onde  $\underline{\bar{F}}_i$  é o vetor de forças nodais equivalentes e  $\underline{K_G}$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema global, os quais são dados por:

$$\underline{\bar{F}}_i = \underline{M_T} \cdot \underline{F}_i, \text{ com } i = 1, 2, 3, \quad (\text{II.60})$$

$$\underline{K_G} = \underline{M_T} \cdot \underline{K} \cdot \underline{M_T}^T \quad (\text{II.61})$$

Deve-se observar que no sistema local a matriz  $\underline{K}$  do elemento é singular, uma vez que os termos relativos à rotação  $\theta_z$

são nulos. Na matriz  $\underline{KG}$ , obtida através da equação (II.61), essa singularidade é eliminada, a não ser que na discretização da estrutura, exista algum nó planar. Nesses casos, atribui-se valor unitário ao elemento da diagonal da matriz  $\underline{KG}$ , equivalente à rotação  $\theta_z$  do nó planar respectivo.

## II.4 - MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO

### MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE

O mesmo procedimento da montagem da matriz de rigidez pode ser utilizado na formação da matriz de massa do elemento.

Determinam-se as matrizes de massa consistente para o efeito de membrana e flexão isoladamente:

A matriz de massa consistente do elemento é calculada por:

$$\underline{M} = t \int_A \underline{N}^T \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{N} \cdot dA, \quad (\text{II.62})$$

onde  $\underline{N}$  é a matriz que relaciona os deslocamentos internos no elemento, com os deslocamentos nodais, e  $\underline{\mu}$  é a matriz de inércia, dada por:

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & ix^2 & 0 \\ 0 & 0 & iy^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.63})$$

sendo  $\rho$  a massa específica e  $i_x$  e  $i_y$  os raios de giração.

### MATRIZ DE MASSA PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO

Como foi visto na equação (II.17), a matriz  $\underline{N}$  para o estado plano é dada por:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} . \quad (\text{II.64})$$

Substituindo (II.63) e (II.64) na equação (II.62), porém não considerando os termos relativos à inércia de rotação  $i_x^2$  e  $i_y^2$  da matriz  $\underline{\mu}$ , obtém-se a matriz de massa para o estado plano de tensão:

$$\underline{M}_m = \frac{A\rho t}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & \text{simétrica} \\ 1/2 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1/2 & 0 & 1 & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (\text{II.65})$$

### MATRIZ DE MASSA PARA FLEXÃO DE PLACAS

Para flexão de placas, precisa-se determinar a matriz  $\underline{N}$ , que relaciona o deslocamento  $W$  e suas derivadas, com os deslocamentos nodais, através da relação:

$$\begin{pmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{\delta}_i^F \quad (\text{II.66})$$

Da equação (II.14), pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\theta} \cdot \begin{pmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.67})$$

onde:

$$\underline{\theta} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 \\ 0 & y_{23} & y_{31} \\ 0 & x_{32} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

e, tendo em vista (II.34), tem-se que:

$$\begin{pmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \underline{\phi}_n \cdot \underline{\alpha};$$



logo, obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\theta} \cdot \underline{\phi}_n \cdot \alpha \quad (\text{II.69})$$

Substituindo a equação (II.40) em (II.69), conclui-se que:

$$\begin{pmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\theta} \cdot \underline{\phi}_n \cdot \underline{U} \cdot \underline{\delta}_i^F, \quad (\text{II.70})$$

que determina a matriz  $\underline{N}$ :

$$\underline{N} = \underline{\theta} \cdot \underline{\phi}_n \cdot \underline{U} \quad (\text{II.71})$$

Com procedimento análogo, substituindo-se (II.71) em (II.62), obtêm-se a matriz de massa para flexão de placas:

$$\underline{M}_f = t \cdot \underline{U}^T \cdot \left[ \int_A (\underline{\phi}_n^T \cdot \underline{\theta}^T \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{\theta} \cdot \underline{\phi}_n) dA \right] \cdot \underline{U} \quad (\text{II.72})$$

Porém, como são desprezados os termos relativos a inércia de rotação da matriz  $\underline{\mu}$ , a equação (II.72) resulta em:

$$\underline{M}_f = \rho \cdot t \cdot \underline{U}^T \cdot \left[ \int_A (\underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}) dA \right] \cdot \underline{U} , \quad (\text{II.73})$$

onde  $\underline{\phi}$  é dada em (II.30).

Pode-se determinar, inicialmente, a matriz de massa  $\underline{M}_\alpha$  em relação aos deslocamentos generalizados, através da relação:

$$\underline{M}_\alpha = \rho \cdot t \cdot \int_A (\underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}) dA , \quad (\text{II.74})$$

ou seja:

$$\underline{M}_\alpha = \frac{A \cdot \rho t}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & \text{simétrica} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & & & & & \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & & & \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{30} & 0 & 0 & \frac{1}{210} & -\frac{1}{210} & \frac{1}{140} & & \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{210} & 0 & \frac{1}{210} & -\frac{1}{420} & \frac{1}{140} & \\ \frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{210} & -\frac{1}{210} & 0 & -\frac{1}{420} & -\frac{1}{420} & \frac{1}{140} \end{bmatrix}$$

Portanto, tendo em vista (II.74) e (II.73), conclui-se que:

$$\underline{M}_f = \underline{U}^T \cdot \underline{M}_\alpha \cdot \underline{U} \quad (\text{II.75})$$

A formação da matriz de massa do elemento, com a superposição dos efeitos de membrana e flexão, é feita de maneira análoga à matriz de rigidez, bem como a transformação da matriz para o sistema global.

### MATRIZ DE MASSA DISCRETA

Na análise dinâmica de estruturas, uma outra alternativa é a utilização de matrizes de massa discreta.

Existem alguns procedimentos para a composição de matriz diagonal agrupada a partir da matriz consistente, levando também em consideração parcelas de massa associadas aos graus de liberdade relativos às rotações, conforme referências [ 8 ] e [ 9 ].

No presente trabalho, optou-se pelo procedimento proposto por KEY [9], na formação da matriz discreta.

Os termos relativos aos graus de liberdade translacionais recebem parcelas iguais de massa, sendo essas parcelas resultantes da soma dos elementos da matriz consistente, associados ao respectivo grau de liberdade.

Para os elementos correspondentes às rotações  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ , faz-se também somatória análoga, porém, multiplica-se o resultado por um coeficiente  $K_y$ , de forma a representar melhor as parcelas de massa associadas às rotações, conforme o problema analisado tenha predominância no efeito de membrana ou flexão. Esse coeficiente, nos procedimentos desenvolvidos neste trabalho, pode ser fornecido pelo usuário. Quando não é atribuído valor para  $K_y$ , obtém-se a matriz discreta na forma mais sim-

ples, com a massa total distribuída apenas pelos graus de liberdade relativos às translações  $U$ ,  $V$  e  $W$ .

### III - NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

#### III.1 - PROBLEMAS NÃO LINEARES

Seja  $\underline{X}$  o vetor que define as coordenadas cartesianas de um ponto P de um corpo no estado inicial. Se este ponto sofre um deslocamento  $\underline{\Delta}$ , medido em relação ao mesmo sistema fixo de referência, as novas coordenadas de P passam a ser definidas pelo vetor  $\underline{\bar{X}}$ , dado por:

$$\underline{\bar{X}} = \underline{X} + \underline{\Delta} \quad (\text{III.1})$$

Como foi visto anteriormente, pode-se expressar os deslocamentos de um ponto qualquer no interior de um elemento, a partir dos deslocamentos nodais, através de:

$$\underline{\Delta} = \underline{N} \cdot \underline{\delta} \quad (\text{III.2})$$

onde  $\underline{N}$  contém as funções de interpolação e  $\underline{\delta}$  os deslocamentos nodais.

Baseando-se no "modelo de deslocamentos", a condição de equilíbrio é obtida pela aplicação do Princípio dos Trabalhos

Virtuais, ou seja:

$$\underline{\psi} = \underline{R} - \underline{F} = 0, \quad (\text{III.3})$$

sendo  $\underline{R}$  o vetor das forças nodais equivalentes às forças nodais externas e  $\underline{F}$  o vetor das forças nodais internas ou reativas.

Portanto  $\underline{\psi}$  corresponde às forças nodais desequilibradas e deve ser reduzido a uma tolerância desejada.

Chamando de  $W_i$  o trabalho das forças internas, tem-se:

$$W_i = \underline{F}^T \cdot d\underline{\delta} = \int_V \underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\varepsilon} \cdot dV. \quad (\text{III.4})$$

Através de relações entre deformações e deslocamentos, é possível escrever a relação:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{\delta}, \quad (\text{III.5})$$

cujas diferenciação em relação a  $\underline{\delta}$  vale:

$$d\underline{\varepsilon} = \underline{B}' \cdot d\underline{\delta} \quad (\text{III.6})$$

Levando (III.6) em (III.4), obtém-se:

$$\underline{F}^T \cdot d\underline{\delta} = \int_V (\underline{\sigma}^T \cdot \underline{B}' \cdot d\underline{\delta}) \cdot dV \quad (\text{III.7})$$

e portanto:

$$\underline{F} = \int_V \underline{B}'^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \quad (\text{III.8})$$

Como  $\underline{R}$  e  $\underline{F}$  dependem dos deslocamentos  $\underline{\delta}$ , a expressão (III.3) representa um sistema de equações não lineares. Neste capítulo, bem como no Capítulo IV, desenvolve-se a formulação para análise não linear provenientes de grandes deflexões (não linearidade geométrica) e plasticidade do material (não linearidade física).

### III.2 - FORMULAÇÃO DE GRANDES DEFLEXÕES

No estudo de estruturas laminares delgadas, podem-se introduzir simplificações na teoria tridimensional, reduzindo-se o problema ao estudo bidimensional, bastando, portanto, a determinação dos deslocamentos da superfície média para se ter o comportamento de toda a estrutura.

Para isso, adota-se a hipótese de Kirchhoff para placas delgadas, segundo a qual, as retas normais à superfície média permanecem normais após a deformação, além de não sofrerem extensibilidade. Sendo adotado um sistema cartesiano  $x$ ,  $y$  e  $z$  com origem no plano da superfície média do elemento, e com o eixo  $z$  normal a esse plano, analiticamente essa hipótese é resumida em:

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (III.9)$$

$$\epsilon_z = 0$$

ressaltando-se, assim, que as deformações por cisalhamento transversal são desprezadas.

É possível então, determinar os deslocamentos de um ponto qualquer da placa, a partir dos deslocamentos correspondentes na superfície média  $U_0$ ,  $V_0$  e  $W_0$ , através de:

$$U = U_0 - z \frac{\partial W_0}{\partial x}$$

$$V = V_0 - z \frac{\partial W_0}{\partial y} \quad (\text{III.10})$$

$$W = W_0$$

Na análise de não-linearidade geométrica, descrita nesse capítulo, supõe-se que os materiais têm comportamento elástico-linear, o que é válido para grande parte dos materiais utilizados, já que o estudo está restrito a pequenas deformações.

A formulação adotada é proposta por von Kármán, que considera grandes rotações, bem maiores que as deformações, porém desprezíveis em relação à unidade, ou seja:

$$\frac{\partial W}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial W}{\partial y} \ll 1.$$

Tendo em vista, ainda, que as rotações relativas dos elementos em torno do eixo  $z$  são muito menores que em torno de  $x$  e  $y$ , já que as placas são estruturas rígidas no seu plano, as deformações podem ser expressas por:



$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{\varepsilon}^M + z \cdot \underline{k} , \quad (\text{III.11})$$

sendo que  $\underline{\varepsilon}^M$  contém as deformações provenientes do estado plano de tensões, considerando porém os termos correspondentes às rotações da superfície média. Portanto o vetor  $\underline{\varepsilon}^M$  é formado pela associação de  $\underline{\varepsilon}^{M,0}$ , que contém as parcelas infinitesimais dessas deformações, e  $\underline{\varepsilon}^{M,L}$ , que insere as parcelas não lineares devido às mudanças na geometria da estrutura. Portanto:

$$\underline{\varepsilon}^M = \underline{\varepsilon}^{M,0} + \underline{\varepsilon}^{M,L} , \quad (\text{III.12})$$

onde:

$$\underline{\varepsilon}^{M,0} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\varepsilon}^{M,L} = \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \\ 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

O vetor  $\underline{k}$  contém as deformações por flexão, expressas pelas curvaturas da superfície média, já definido em (II.24):

$$\underline{k} = \left\{ \begin{array}{c} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}$$

É necessário relacionar as deformações aos deslocamentos nodais. Partindo da equação (III.2), e lembrando que o vetor deslocamento é composto pelos vetores  $\underline{\delta}_i^M$  e  $\underline{\delta}_i^F$ , relativos aos efeitos de membrana e flexão, conforme (II.9), tem-se:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{N}_i^M & 0 \\ 0 & \underline{N}_i^F \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \underline{\delta}_i^M \\ \underline{\delta}_i^F \end{array} \right\} \quad (\text{III.14})$$

Chega-se, então, às deformações:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^{M,0} &= \underline{B1} \cdot \underline{\delta}_i^M \\ \underline{\varepsilon}^{M,L} &= \frac{1}{2} \cdot \underline{BS} \cdot \underline{\delta}_i^F \\ \underline{k} &= \underline{B2} \cdot \underline{\delta}_i^F \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

com  $\underline{B1}$  e  $\underline{B2}$  já determinadas através das equações (II.19) e (II.43), bastando, portanto, o cálculo da matriz  $\underline{BS}$ , não linear, já que é função dos deslocamentos. Para tal, é conveniente re-escrever o vetor  $\underline{\varepsilon}^{M,L}$  na forma:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{M,L} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{DW}} \quad (\text{III.16})$$

Diferenciando (III.16), obtém-se:

$$d\underline{\underline{\epsilon}}^{M,L} = \frac{1}{2} (d\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{DW}} + \underline{\underline{A}} \cdot d\underline{\underline{DW}}) = \underline{\underline{A}} \cdot d\underline{\underline{DW}} \quad (\text{III.17})$$

O vetor  $\underline{\underline{DW}}$  é obtido em função dos deslocamentos nodais  $\delta_i^F$ , através de:

$$\underline{\underline{DW}} = \underline{\underline{G}} \cdot \delta_i^F \quad (\text{III.18})$$

onde a matriz  $\underline{\underline{G}}$  contém as derivadas de  $N_i^F$  em relação a  $x$  e  $y$ , já calculadas em (II.70).

A diferenciação de (III.18) conduz a

$$d\underline{\underline{DW}} = \underline{\underline{G}} \cdot d\delta_i^F \quad (\text{III.19})$$

que, quando substituída em (III.17), fornece:

$$d\underline{\underline{\epsilon}}^{M,L} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot d\delta_i^F \quad (\text{III.20})$$

Como, de (III.15), pode-se escrever

$$d\underline{\underline{\epsilon}}^{M,L} = \underline{\underline{BS}} \cdot d\delta_i^F \quad (\text{III.21})$$

então, comparando (III.20) com (III.21), chega-se a:

$$\underline{BS} = \underline{A} \cdot \underline{G} \quad (\text{III.22})$$

### DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Denotando-se por  $\underline{K}_T$ , a matriz de rigidez tangente, que relaciona incrementos de força com incrementos de deslocamentos, ou seja,

$$d\underline{F} = \underline{K}_T \cdot d\underline{\delta} \quad , \quad (\text{III.23})$$

através de diferenciação da equação (III.8) em relação aos deslocamentos  $\underline{\delta}$ , obtêm-se:

$$d\underline{F} = \int_V (\underline{B}'^T \cdot d\underline{\sigma} + d\underline{B}'^T \cdot \underline{\sigma}) dV \quad (\text{III.24})$$

e, tendo em vista que  $\underline{B}'$  relaciona incrementos de deformações com incrementos de deslocamentos, conforme (III.6), pode-se escrever, a partir da equação (III.15):

$$d\underline{\varepsilon}^{M,0} = \underline{B}_1 \cdot d\underline{\delta}_i^M$$

$$d\underline{\varepsilon}^{M,L} = \underline{B}_S \cdot d\underline{\delta}_i^F \quad (\text{III.25})$$

$$d\underline{k} = \underline{B}_2 \cdot d\underline{\delta}_i^F$$

ou:

$$\underline{d\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \underline{d\varepsilon^M} \\ \underline{dk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B1} & \underline{BS} \\ 0 & \underline{B2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{d\delta_i^M} \\ \underline{d\delta_i^F} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

logo, tem-se:

$$\underline{B'} = \begin{bmatrix} \underline{B1} & \underline{BS} \\ 0 & \underline{B2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Costuma-se representar a matriz  $\underline{B'}$  como a soma da matriz  $\underline{B^0}$  linear com a matriz  $\underline{B^L}$ , que contém a parcela não linear:

$$\underline{B'} = \underline{B^0} + \underline{B^L} = \begin{bmatrix} \underline{B1} & 0 \\ 0 & \underline{B2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \underline{BS} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

Como  $\underline{B^0}$  não depende dos deslocamentos, a diferencial de  $\underline{B'}$  será função apenas de  $\underline{B^L}$ ; então, vem:

$$d\underline{B'}^T = d\underline{BS}^T = \underline{G}^T \cdot d\underline{A}^T \quad (\text{III.29})$$

Com a notação:

$$\underline{T'} = \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_x & \underline{\tau}_{xy} \\ \underline{\tau}_{xy} & \underline{\sigma}_y \end{bmatrix}, \quad (\text{III.30})$$

e sendo  $\underline{\sigma}$  o vetor que contém as tensões, é possível escrever:

$$d\bar{A}^T \cdot \bar{\sigma} = \bar{T}' \cdot d\bar{W} \quad (\text{III.31})$$

obtendo-se, então, por substituição de (III.19) em (III.31):

$$d\bar{A}^T \cdot \bar{\sigma} = \bar{T}' \cdot \bar{G} \cdot d\bar{\delta}_i^F \quad (\text{III.32})$$

Logo, a segunda parcela de  $d\bar{F}$  na equação (III.24), tendo em vista (III.29) e (III.32), será:

$$d\bar{B}'^T \cdot \bar{\sigma} = \bar{G}^T \cdot \bar{T}' \cdot \bar{G} d\bar{\delta}_i^F \quad (\text{III.33})$$

A primeira parcela de  $d\bar{F}$  pode ser determinada em função dos deslocamentos, recorrendo-se à relação entre tensões e deformações:

$$d\bar{\sigma} = \bar{D}' \cdot d\bar{\epsilon} \quad (\text{III.34})$$

que através da substituição de (III.6), transforma-se em:

$$d\bar{\sigma} = \bar{D}' \cdot \bar{B}' \cdot d\bar{\delta} \quad (\text{III.35})$$

Então:

$$\bar{B}'^T \cdot d\bar{\sigma} = \bar{B}'^T \cdot \bar{D}' \cdot \bar{B}' \cdot d\bar{\delta} \quad (\text{III.36})$$

Substituindo (III.33) e (III.36) em (III.24), vem:

$$d\bar{F} = \left[ \int_V (\bar{B}'^T \cdot \bar{D}' \cdot \bar{B}' + \bar{G}^T \cdot \bar{T}' \cdot \bar{G}) dV \right] \cdot d\bar{\delta} \quad (\text{III.37})$$

Quando se trabalha com elemento plano, como foi visto no

capítulo anterior, é interessante integrar as tensões ao longo da espessura do elemento, para obtenção dos esforços normais, momentos fletores e de torção, por unidade de comprimento; portanto:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot dz ; N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot dz ; N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot dz \quad (\text{III.38})$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz ; M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz ; M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (\text{III.39})$$

Assim, as relações constitutivas ficam expressas através dos esforços:

$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{DM} \cdot \underline{\varepsilon}^M \quad (\text{III.40})$$

$$\underline{m} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{DB} \cdot \underline{k} \quad (\text{III.41})$$

onde a matriz  $\underline{DB}$  foi definida na equação (II.25), e:

$$\underline{DM} = t \cdot \underline{D} \quad (\text{III.42})$$

Pode-se, então, compor o vetor  $\underline{\sigma}$ , através de (III.40) e (III.41):

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \underline{n} \\ \underline{m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{DM} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{DB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}^M \\ \underline{k} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

e, portanto, a matriz  $\underline{D}'$  que aparece em (III.34) será:

$$\underline{D}' = \begin{bmatrix} \underline{DM} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{DB} \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

A integração da matriz  $\underline{T}'$ , ao longo da espessura, fornece:

$$\underline{M}' = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} ; \quad (\text{III.45})$$

consegue-se, assim, reduzir a integração da equação (III.37) em uma integral de área. Levando (III.27) e (III.44) em (III.37) e tendo em vista (III.45), segue-se que:

$$d\underline{F} = \left[ \int_A \begin{bmatrix} \underline{B1}^T & \underline{0} \\ \underline{BS}^T & \underline{B2}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{DM} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{DB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{B1} & \underline{BS} \\ \underline{0} & \underline{B2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{G}^T \cdot \underline{M}' \cdot \underline{G} \end{bmatrix} dA \right] \cdot \begin{Bmatrix} d\underline{\delta}_i^M \\ d\underline{\delta}_i^F \end{Bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

Comparando-se (III.46) com (III.23), e desenvolvendo as operações dos termos contidos na integral, chega-se à matriz  $\underline{K}_T$ :



$$\underline{K}_T = \int_A \begin{bmatrix} \underline{B1}^T \cdot \underline{DM} \cdot \underline{B1} & \underline{B1}^T \cdot \underline{DM} \cdot \underline{BS} \\ \underline{BS}^T \cdot \underline{DM} \cdot \underline{B1} & \underline{B2}^T \cdot \underline{DB} \cdot \underline{B2} + \underline{BS}^T \cdot \underline{DM} \cdot \underline{BS} + \underline{G}^T \cdot \underline{M'} \cdot \underline{G} \end{bmatrix} \cdot dA \quad (\text{III.47})$$

Pode-se representar a matriz  $\underline{K}_T$  como a soma de duas matrizes:

$$\underline{K}_T = \underline{K}_T^0 + \underline{K}_T^L, \quad (\text{III.48})$$

onde

$$\underline{K}_T^0 = \int_A \begin{bmatrix} \underline{B1}^T \cdot \underline{DM} \cdot \underline{B1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B2}^T \cdot \underline{DB} \cdot \underline{B2} \end{bmatrix} \cdot dA \quad (\text{III.49})$$

é a parte linear da matriz  $\underline{K}_T$ , já calculada no Capítulo II, e

$$\underline{K}_T^L = \int_A \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{B1}^T \cdot \underline{DM} \cdot \underline{BS} \\ \underline{BS}^T \cdot \underline{DM} \cdot \underline{B1} & \underline{BS}^T \cdot \underline{DM} \cdot \underline{BS} + \underline{G}^T \cdot \underline{M'} \cdot \underline{G} \end{bmatrix} \cdot dA \quad (\text{III.50})$$

é a parcela não linear de  $\underline{K}_T$ .

#### DETERMINAÇÃO DO VETOR DAS FORÇAS NODAIS INTERNAS

O vetor  $\underline{F}$  das forças nodais internas, conforme (III.8):

$$\underline{F} = \int_V \underline{B'}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV$$

é também determinado, a partir da integração ao longo da espessura, em função dos esforços contidos em  $\underline{n}$  e  $\underline{m}$ , calculados através de (III.43). Ou seja:

$$\underline{F} = \int_A \left( \underline{B}^T \cdot \begin{Bmatrix} \underline{n} \\ \underline{m} \end{Bmatrix} \right) dA \quad (\text{III.51})$$

Substituindo-se (II.27) em (III.51), tem-se:

$$\underline{F} = \int_A \left( \begin{bmatrix} \underline{B}_1^T & \underline{0} \\ \underline{B}_S^T & \underline{B}_2^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{n} \\ \underline{m} \end{Bmatrix} \right) \cdot dA, \quad (\text{III.52})$$

que resulta em:

$$\underline{F} = \int_A \begin{Bmatrix} \underline{B}_1^T \cdot \underline{n} \\ \underline{B}_S^T \cdot \underline{n} + \underline{B}_2^T \cdot \underline{m} \end{Bmatrix} \cdot dA \quad (\text{III.53})$$

### III.3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

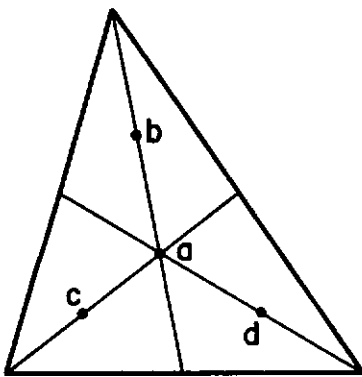
Na análise de não-linearidade geométrica ou física, um fator importante é a escolha do método de integração para o cálculo de matrizes envolvidas nas formulações.

No presente trabalho, como as integrais envolvem coordenadas naturais, utiliza-se a integração numérica específica para elementos triangulares, desenvolvida por HAMMER [15], e sugeri

da nas referências [ 1 ] e [16].

Verificou-se, a partir da resolução de exemplos numéricos, que com três pontos de integração (localizados na metade dos lados do triângulo) consegue-se convergência, porém para solução incorreta, em alguns casos.

Por esse motivo, escolheu-se quatro pontos de integração, indicados na Figura (III.1), bem como os respectivos pesos. Com quatro pontos de integração, obtém-se integração exata de um polinômio cúbico em coordenadas naturais.



ponto	coordenadas	peso
a	$1/3; 1/3; 1/3$	$-27/48$
b	$0,6; 0,2; 0,2$	} $25/48$
c	$0,2; 0,6; 0,2$	
d	$0,2; 0,2; 0,6$	

Figura III.1

Algumas críticas foram feitas a esse procedimento, principalmente pelo peso negativo correspondente ao ponto central do triângulo, sugerindo alternativamente a integração com sete pontos (localizados nos nós, na metade dos lados e baricentro). Naturalmente, consegue-se o mesmo resultado, porém exigindo um esforço computacional muito maior que o caso utilizado.

LANNON [16] procura desfazer essas críticas, mostrando que a integração com quatro pontos pode ser perfeitamente aplicada.

Além disso, na análise de problemas elasto-plásticos, a localização dos pontos no interior do elemento, parece ser uma escolha mais adequada.

## IV - NÃO-LINEARIDADE FÍSICA

O objetivo básico desse capítulo é a determinação das leis constitutivas, as quais definem as matrizes que relacionam tensões e deformações, que são utilizadas no Método dos Elementos Finitos, na aplicação da teoria da plasticidade.

A discretização de superfícies com o uso de elementos planos requer, no entanto, além dos conceitos básicos da teoria, a introdução de modelos elasto-plásticos que forneçam uma boa aproximação do comportamento plástico dos materiais, avaliando as matrizes nos pontos de integração dos elementos localizados na superfície média.

Algumas leis básicas, as quais governam o comportamento elasto-plástico dos materiais, devem ser introduzidas neste capítulo, sem a pretensão de se apresentar a teoria clássica da plasticidade.

### IV.1 - TEORIA MATEMÁTICA DA PLASTICIDADE

O objetivo da teoria da plasticidade é a determinação de relações entre tensões e deformações, para materiais que apre-

sentam resposta elasto-plástica. Na Figura (IV.1) é mostrada uma possível curva "tensão-deformação" de um ensaio uniaxial, para um material com estas características.

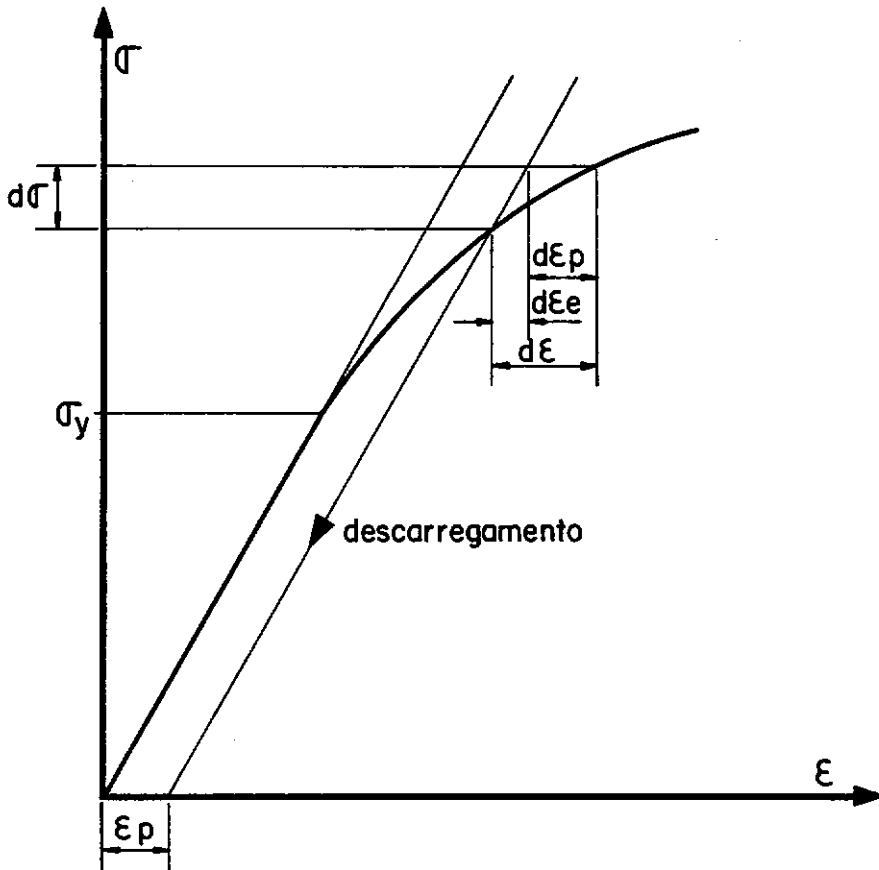


Figura IV.1

Basicamente, o comportamento plástico é caracterizado por uma deformação irreversível  $\epsilon_p$ , após atingida a tensão de escoamento  $\sigma_y$ . Esta deformação, que é considerada independente do tempo de aplicação do carregamento, é mantida desde que certo nível de tensão tenha sido alcançado.

Observa-se, na figura, que inicialmente há um trecho elástico, seguido por um escoamento, podendo haver endurecimento do material (*strain hardening* ou *work hardening*), quando as tensões crescem muito menos com as deformações, do que no regime

elástico. Além disso, o descarregamento é linear, permanecendo a parcela  $\epsilon_p$ .

Para se ter uma teoria que modele esse comportamento, devem ser obtidas relações explícitas entre tensão e deformação, para a fase elástica do material e para a fase após o escoamento, onde as deformações são compostas por componentes elásticas e plásticas. Deve-se ter também o critério de escoamento, que indica o nível de tensão para o qual começa o escoamento plástico do material.

Antes do escoamento as relações constitutivas são expressas por equações lineares, desenvolvidas no Capítulo II.

### SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO

Para um estado complexo de tensão, um critério de escoamento determina as condições que caracterizam a transição entre o regime elástico e plástico, e genericamente é escrito na forma:

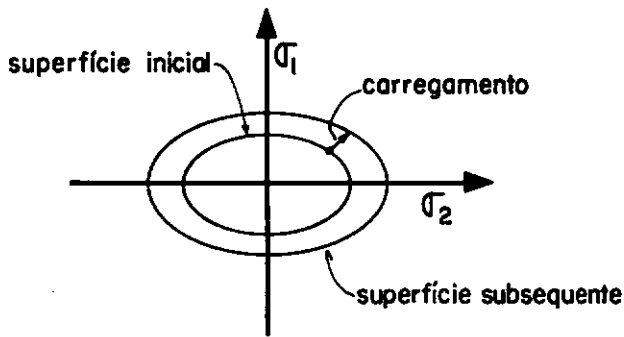
$$F(\underline{\sigma}, k) = f(\underline{\sigma}) - Y(k) = 0, \quad (\text{IV.1})$$

onde  $f(\underline{\sigma})$  é função do estado de tensão atual  $\underline{\sigma}$ , e  $Y(k)$  é função do material, podendo ser avaliada experimentalmente. A função  $Y(k)$ , no caso de endurecimento do material, será função de um parâmetro  $k$ , e portanto, dependerá do nível de deformação plástica.

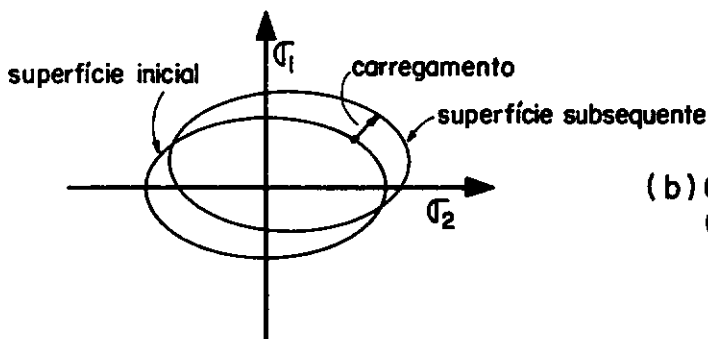
Todo critério de escoamento definido pela função  $F$ , gera uma superfície no espaço de tensões, conhecida como superfície de escoamento.

Após o escoamento inicial, o comportamento do material pode ser caracterizado por um endurecimento, havendo então um aumento do limite elástico, de tal maneira que o nível de tensão para o qual ocorre uma deformação plástica adicional depende do grau da deformação atual. Assim, a superfície de escoamento irá variar a cada estágio de deformações plásticas, gerando superfícies subseqüentes, conhecidas por superfícies de carregamento.

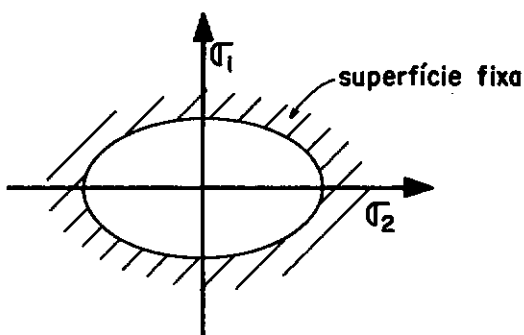
Alguns modelos que descrevem o tipo de endurecimento do material, são mostrados na Figura (IV.2).



(a) COMPORTAMENTO ISOTRÓPICO



(b) COMPORTAMENTO CINEMÁTICO



(c) PERFEITAMENTE PLÁSTICO

Figura IV.2



Se há expansão uniforme da superfície em torno da origem, com a superfície subsequente mantendo a forma e orientação da inicial, o modelo é dito isotrópico (Figura (IV.2.a)). Quando as superfícies subseqüentes mantêm dimensão e forma, mas transladam como corpo rígido, no espaço de tensões, o endurecimento é dito cinemático (Figura (IV.2.b)).

Um modelo plástico-perfeito é apresentado na Figura (IV.2.c), sendo a superfície fixa.

O desenvolvimento progressivo da superfície de escoamento é representado relacionando-se a função de escoamento do material  $Y(k)$  com a deformação plástica, através do parâmetro  $k$  de endurecimento. Existem duas hipóteses quanto à definição desse parâmetro; a primeira, conhecida como *work hardening*, define  $k$  como função do trabalho plástico  $W_p$ , acumulado durante as deformações, isto é,

$$k = W_p = \int \underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\epsilon}_p, \quad (\text{IV.2})$$

onde  $d\underline{\epsilon}_p$  é a parcela plástica das deformações, ocorridas durante um incremento de deformação.

A segunda hipótese admite que o parâmetro  $k$  seja função da deformação plástica equivalente  $\bar{\epsilon}_p$ , definida por

$$k = \bar{\epsilon}_p = \int d\bar{\epsilon}_p. \quad (\text{IV.3})$$

Esse procedimento é chamado de *strain hardening*.

Recorrendo à equação (IV.1), e tendo em vista a possibilidade de endurecimento para um estado multiaxial de tensões,

observa-se que, se  $f < Y(k)$  tem-se ainda um comportamento elástico. Quando  $f = Y(k)$ , tem início o escoamento plástico do material, e uma mudança incremental na função de escoamento, devido a um incremento de tensão, é dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot d\sigma ; \quad (IV.4)$$

nesse caso, pode-se ter:

1) descarregamento elástico, quando  $df < 0$ , e então o ponto retorna para dentro da superfície de escoamento;

2) carregamento plástico, se  $df > 0$ , e o material tem comportamento plástico com endurecimento, permanecendo o ponto de tensão na superfície subsequente;

3) carregamento neutro, que ocorre em materiais perfeitamente plásticos, quando  $df = 0$ , ficando o ponto na superfície inicial, que é fixa.

É possível mostrar, ainda, que para materiais estáveis, como conseqüência da lei associativa de escoamento e da irreversibilidade do trabalho plástico, tanto a superfície inicial de escoamento, como todas as superfícies subsequentes, devem ser convexas. [20], [21], [22].

## RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Partindo de que a condição de plasticidade é atingida, isto é  $F = 0$ , deformações plásticas ocorrem, e o incremento de deformação atual será:

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p , \quad (IV.5)$$

onde  $d\epsilon_e$  e  $d\epsilon_p$  são os incrementos de deformações elásticas e plásticas, respectivamente.

O incremento de deformações elásticas é dado por

$$d\epsilon_e = \underline{D}^{-1} \cdot d\sigma, \quad (\text{IV.6})$$

sendo  $\underline{D}$ , a matriz das constantes elásticas do material.

A lei associativa de escoamento plástico define que os incrementos de deformações plásticas, são proporcionais ao gradiente da função de carregamento, ou seja,

$$d\epsilon_p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (\text{IV.7})$$

onde  $d\lambda$ , é uma constante a ser determinada. Essa relação é conhecida como condição de normalidade, já que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  é um vetor de direção normal à superfície de escoamento, no ponto de tensão considerado (Figura (IV.3)).

Portanto, o incremento total de deformação será expresso por

$$d\epsilon = \underline{D}^{-1} \cdot d\sigma + d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (\text{IV.8})$$

que após a determinação da constante  $d\lambda$ , e conhecimento da função de escoamento, resulta na relação incremental entre tensão e deformação, através da matriz elasto-plástica  $\underline{D}_{ep}$ , na forma:

$$d\sigma = \underline{D}_{ep} \cdot d\epsilon \quad (\text{IV.9})$$

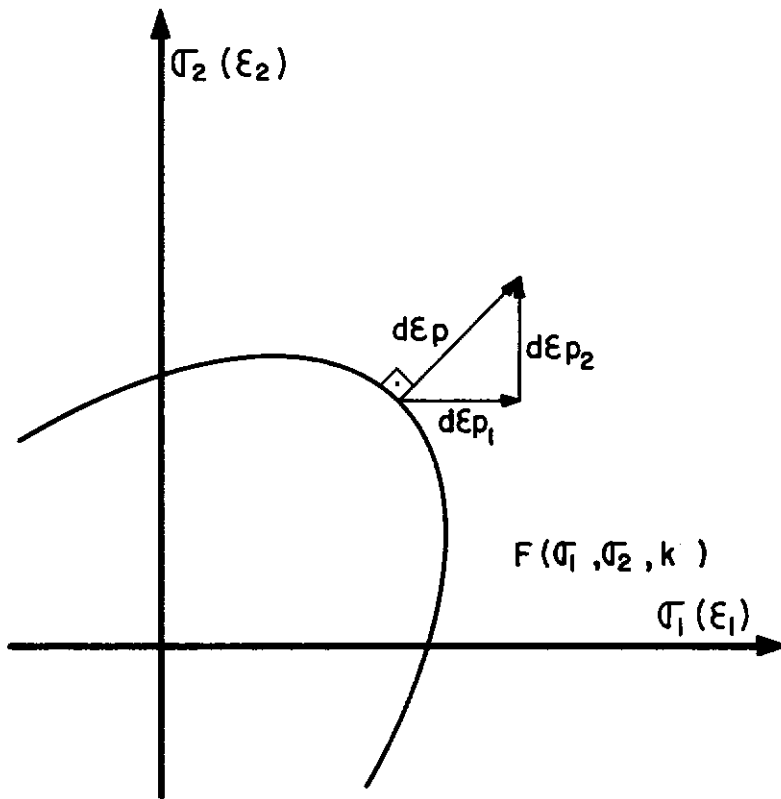


Fig. IV.3\_ CONDIÇÃO DE NORMALIDADE

### CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES

Vários estudos foram feitos, para a obtenção dos critérios de escoamento, associados aos diversos materiais. Vale destacar que os critérios de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, têm recebido especial atenção e atualmente são largamente aplicados, principalmente através de métodos numéricos.

Os dois primeiros critérios apresentam boa concordância

com os resultados obtidos experimentalmente para materiais dúcteis, enquanto os outros dois são aplicados à materiais frágeis e solos.

No presente trabalho, o estudo é baseado no critério de von Mises, para materiais com endurecimento isotrópico. Nesse caso, as duas hipóteses apresentadas quanto ao endurecimento do material são equivalentes [22].

Fisicamente, um critério de escoamento é independente da orientação do sistema de coordenadas empregado, sendo conveniente expressá-lo em função de três invariantes de tensões  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$ .

Von Mises sugeriu que o material começa a se deformar plasticamente, quando o segundo invariante de tensões desviatórias  $J_2$  atinge um valor crítico. Analiticamente o critério é expresso por

$$J_2 = \frac{1}{3} \cdot \sigma_Y^2 \quad , \quad (\text{IV.10})$$

onde  $\sigma_Y$  é a tensão de escoamento do material para o estado uniaxial.

O segundo invariante de tensões desviatórias, vale:

$$J_2 = \frac{1}{6} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad , \quad (\text{IV.11})$$

ou seja,

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot (S_X^2 + S_Y^2 + S_Z^2) + \tau_{XY}^2 + \tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2 \quad , \quad (\text{IV.12})$$

onde

$$S_x = \sigma_x - \sigma_m$$

$$S_y = \sigma_y - \sigma_m$$

$$S_z = \sigma_z - \sigma_m ,$$

(IV.13)

com

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Reescrevendo a equação (IV.10) na forma:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3} \ J_2^{1/2} = \sigma_Y , \quad (IV.14)$$

define-se então  $\bar{\sigma}$  como a tensão efetiva ou tensão equivalente, que quando atinge a tensão de escoamento do material, indica o início do escoamento.

Existem duas interpretações físicas para o critério de von Mises. A primeira, sugerida por Nadai, é que o escoamento tem início quando a tensão de cisalhamento octaédrica atinge certo valor crítico. Essa tensão ocorre no plano octaédrico, cuja direção normal é igualmente inclinada, em relação aos eixos principais, e vale:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot J_2} \quad (IV.15)$$

A interpretação de Hencky para o critério, é que o início do escoamento ocorre quando a energia de distorção elástica desenvolvida, alcança um valor crítico. Esse valor é igual à energia de distorção do material, quando este é submetido a ensaio de tração simples.

Observa-se que, no critério, as tensões hidrostáticas não provocam escoamento, pois essas tensões não interferem na energia de distorção. Observações experimentais indicam que as deformações plásticas de metais realmente independem de tensões hidrostáticas.

Como consequência disso, a superfície definida pela equação (IV.10), quando representada no espaço de tensões principais, corresponde a um cilindro com eixo na direção igualmente inclinada com os eixos do sistema, e raio igual a  $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_Y$  (Figura (IV.4)).

O endurecimento isotrópico do material dá origem a novas superfícies, expandidas e concêntricas em relação à inicial, que podem ser representadas através da projeção no plano  $\pi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$ .

A lei de endurecimento do material  $Y(k)$  é expressa em termos da tensão equivalente  $\bar{\sigma}$  e da deformação plástica equivalente  $\bar{\epsilon}_p$ , através de:

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\epsilon}_p) \quad (IV.16)$$

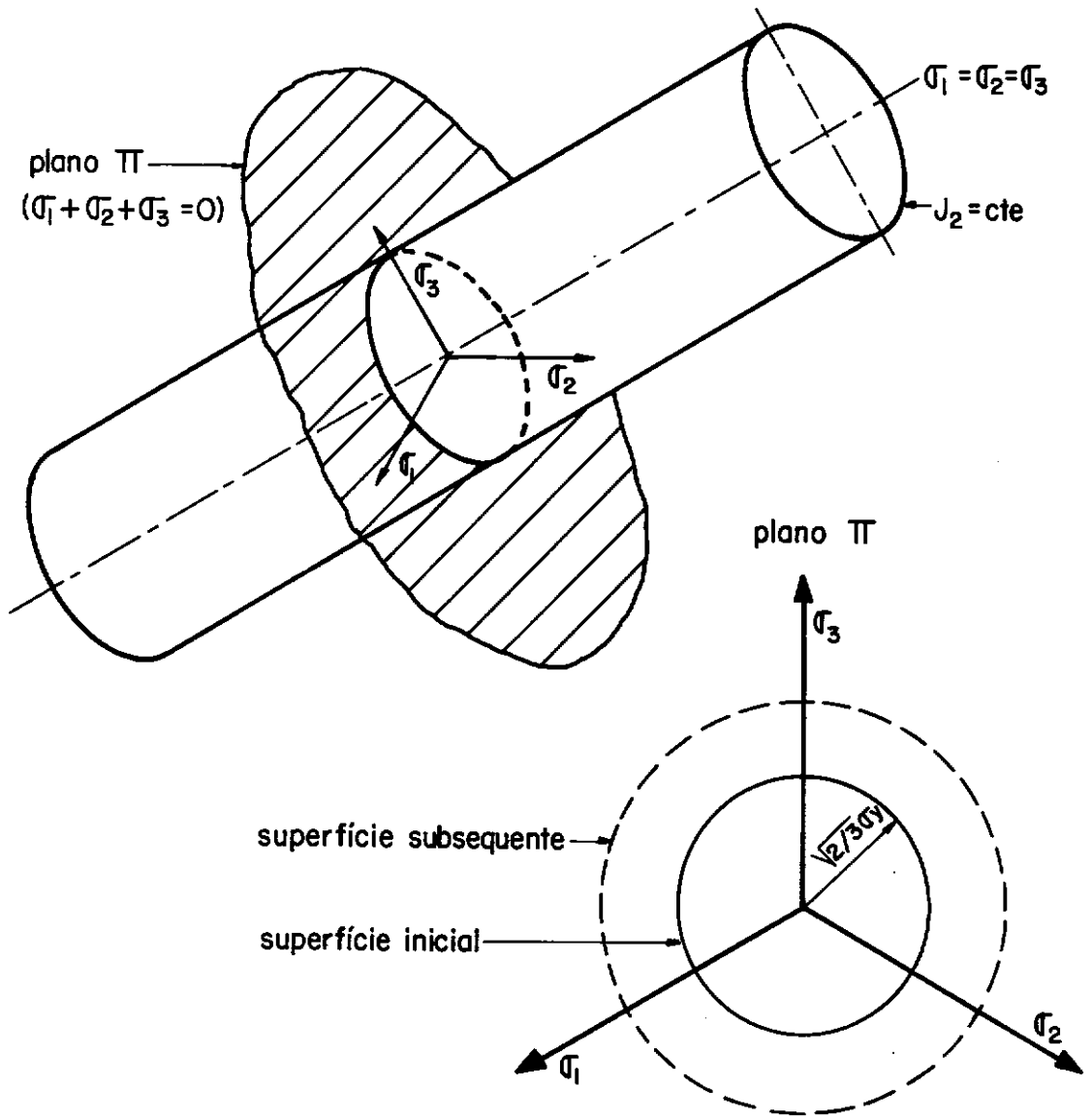


Fig.IV.4\_INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO CRITÉRIO DE VON MISES

Para definição da função  $H$ , recorre-se à curva "tensão-deformação" do ensaio uniaxial (Figura (IV.1)). O comportamento, inicialmente elástico, é caracterizado pelo módulo de elasticidade do material  $E$ . Superada a tensão de escoamento  $\sigma_Y$ , a resposta é definida através do módulo tangente elasto-plástico  $E_T$ , que representa a variação da tangente à curva, dado por

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

(IV.17)



No caso uniaxial, tem-se que  $\sigma_1 = \sigma$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ; logo, a tensão equivalente é igual a  $\sigma$ , sendo a deformação plástica equivalente igual à respectiva deformação  $\epsilon_p$ .

Diferenciando, então, a equação (IV.16), vem:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}_p} = H'(\bar{\epsilon}_p) \quad (\text{IV.18})$$

ou seja,

$$H'(\bar{\epsilon}_p) = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} \quad (\text{IV.19})$$

A deformação plástica é dada por:

$$d\epsilon_p = d\epsilon - d\epsilon_e, \quad (\text{IV.20})$$

que, quando substituída em (IV.19), resulta

$$H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon - d\epsilon_e} = \frac{1}{\frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{d\epsilon_e}{d\sigma}}. \quad (\text{IV.21})$$

Como o módulo elástico  $E$ , é expresso por

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon_e}, \quad (\text{IV.22})$$

e tendo em vista a equação (IV.17), obtém-se

$$H' = \frac{1}{\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E}}, \quad (\text{IV.23})$$

isto é,

$$H' = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (\text{IV.24})$$

Assim, a função  $H'$  pode ser determinada experimentalmente, através do ensaio uniaxial do material, e como será visto posteriormente, necessita-se de  $H'$ , e não da função  $H$ , na formulação matricial.

## IV.2 - CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO PARA CASCAS DELGADAS

Para cascas de pequena espessura, simplificações são introduzidas quando se adotam as hipóteses de Kirchhoff-Love. Como foi visto no Capítulo III, as tensões de cisalhamento transversais  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{yz}$ , bem como a tensão normal  $\sigma_z$ , podem ser desprezadas. Nesse caso, o critério de von Mises (equação (IV.10)), será expresso por:

$$(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2) = \sigma_Y^2, \quad (\text{IV.25})$$

ou seja,

$$\frac{1}{\sigma_Y^2} \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2) = 1. \quad (\text{IV.26})$$

Nessa forma, o critério pode ser aplicado diretamente a cascas de pequena espessura, mas para obtenção das matrizes envolvidas na formulação, é necessária a integração em todo o volume dos elementos utilizados na discretização da casca. Como em um elemento genérico, para um nível qualquer de carga, a

plastificação não atinge necessariamente todo o elemento, a integração requer uma separação da região elástica e plástica.

Já que a plastificação começa nas faces da superfície da casca, expandindo-se para a região interna, geralmente a integração numérica através da espessura é feita por camadas, conseguindo-se assim, representar a propagação da plastificação, através do escoamento dessas camadas.

Quando, no entanto, utilizam-se elementos planos, é conveniente escrever o critério de escoamento em função dos esforços resultantes da integração das tensões ao longo da espessura, definidos nas equações (III.38) e (III.39).

A primeira aproximação do critério de von Mises, em termos dos esforços por unidade de comprimento, foi proposta por Ilyushin em 1948. [23], [24], [25].

#### SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE ILYUSHIN

Através da teoria das deformações, Ilyushin derivou uma superfície de escoamento baseada no critério de von Mises para materiais elasto-plásticos perfeitos, em função dos invariantes dos esforços, que são dados por:

$$\bar{N} = N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3 N_{xy}^2$$

$$\bar{M} = M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2$$

$$\overline{MN} = N_x M_x + N_y M_y - \frac{1}{2} N_x M_y - \frac{1}{2} N_y M_x + 3 N_{xy} M_{xy}$$

(IV.27)

Para isso, utilizou três formas quadráticas não dimensionais, expressas por:

$$Q_t = \frac{\bar{N}}{N_0^2}$$

$$Q_m = \frac{\bar{M}}{M_0^2}$$

$$Q_{tm} = \frac{\overline{MN}}{M_0 \cdot N_0} ,$$

(IV.28)

sendo:

$$N_0 = \sigma_Y \cdot t$$

$$M_0 = \frac{\sigma_Y \cdot t^2}{4} ,$$

(IV.29)

ou por meio de relações paramétricas da forma:

$$Q_t = f_1 (\phi, \mu)$$

$$Q_m = f_2 (\phi, \mu)$$

$$Q_{tm} = f_3 (\phi, \mu)$$

(IV.30)

Os dois parâmetros  $\phi$  e  $\mu$  correspondem a:

$$\phi = \frac{e_{i2}}{e_{i1}}$$

$$\mu = \frac{e_{i0}}{e_{i1}},$$

(IV.31)

onde  $e_{i1}$  é a deformação equivalente  $e_i$  na face superior da superfície da casca, e  $e_{i2}$ , a deformação equivalente na face inferior;  $e_{i0}$  é o mínimo valor de  $e_i$ . Ilyushin escreveu dois conjuntos separados das funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ , para o uso com a equação (IV.30). Para o primeiro conjunto, que indica predominância da flexão,  $e_{i0}$  ocorre dentro da espessura da casca; para o segundo, quando há predominância do estado plano de tensões,  $e_{i0}$  ocorre fora da casca.

Em situações de predominância do efeito de flexão, e partindo de que toda a secção atingiu o escoamento, Ilyushin simplificou a equação (IV.30), eliminando os parâmetros  $\phi$  e  $\mu$ , o que resultou na superfície aproximada

$$F_I = Q_t + Q_m + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left| Q_{tm} \right| = 1, \quad (IV.32)$$

que, com a substituição das equações (IV.28) e (IV.29), pode ser escrita como

$$F_I = \frac{\bar{N}}{\sigma_Y^2 t^2} + \frac{16 \bar{M}}{\sigma_Y^2 t^4} + \frac{4 s \bar{MN}}{\sqrt{3} \sigma_Y^2 t^3} = 1, \quad (IV.33)$$

onde  $s$  é o sinal do termo  $\bar{MN}$ , ou seja:

$$s = \frac{\bar{MN}}{|\bar{MN}|} \quad (IV.34)$$

Outros autores apresentaram superfícies alternativas aproximadas, utilizando as formas quadráticas  $Q_t$ ,  $Q_m$  e  $Q_{tm}$ . Essas aproximações foram comparadas por ROBINSON [23], que concluiu ser a superfície de Ilyushin a melhor aproximação linear no espaço definido por  $Q_t$ ,  $Q_m$  e  $Q_{tm}$ .

### SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE CRISFIELD

A superfície de Ilyushin representa uma boa aproximação quando o efeito de flexão é predominante, já que, nesses casos, é grande a curvatura plástica equivalente, a qual é representada por  $\bar{k}_p$  e definida de modo análogo à equação (IV.3):

$$\bar{k}_p = \int d\bar{k}_p \quad (\text{IV.35})$$

Isto indica que a superfície apresenta bom comportamento nas seções totalmente plastificadas, onde o momento tende para o valor  $M_0$  (equação (IV.29)), enquanto a curvatura plástica equivalente tende para valores infinitos.

Quando uma das fibras extremas atinge o escoamento, tem-se  $\bar{k}_p = 0$ , e pode-se definir uma superfície inicial de escoamento. Nesse caso, as tensões ao longo da espessura da seção estão ainda no regime elástico, sendo calculadas através de:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{t} \pm \frac{6 M_x}{t^2} \\ \sigma_y &= \frac{N_y}{t} \pm \frac{6 M_y}{t^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{t} \pm \frac{6 M_{xy}}{t^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Essa superfície inicial de escoamento é obtida através da substituição de (IV.36) no critério de von Mises (IV.26):

$$F_1 = Q_t + \frac{9}{4} \cdot Q_m + 3 |Q_{tm}| = 1 \quad (\text{IV.37})$$

CRISFIELD [25] propôs, então, uma modificação na superfície de Ilyushin, visando obter melhor aproximação para valores pequenos de  $\bar{K}_p$ . Para isso, desenvolveu uma superfície expressa por

$$F_C(Q_t, Q_m, Q_{tm}, \bar{K}_p) = 1, \quad (\text{IV.38})$$

onde  $\bar{K}_p$  deve ser tal que  $F_C$  seja igual à superfície inicial  $F_1$ , para  $\bar{K}_p = 0$ , e igual a  $F_I$ , para  $\bar{K}_p \rightarrow \infty$ .

De modo a atender essas condições, Crisfield sugeriu a simples substituição do momento uniaxial plástico  $M_0$ , pelo momento  $M_C$ , onde  $M_C$  segue a curva "momento-curvatura" para o caso uniaxial. Isto é, o momento  $M_C$ , varia do valor  $M_1$ , dado por

$$M_1 = \frac{\sigma_Y t^2}{6}, \quad (\text{IV.39})$$

que corresponde ao escoamento da primeira fibra na secção, até o valor  $M_0$  quando toda a secção já atingiu o escoamento.

O momento  $M_C$  é relacionado a  $M_0$ , através de:

$$M_C = \alpha(\bar{K}_p) \cdot M_0, \quad (\text{IV.40})$$

onde a função  $\alpha$  é obtida a partir da curva "momento-curvatura" e da curvatura plástica equivalente

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3} \cdot \exp \left( - \frac{4}{3} \frac{E \cdot t}{\sigma_Y} \cdot \bar{K}_p \right) \quad (\text{IV.41})$$

Assim, com a substituição de  $M_c$  por  $M_0$  nas equações (IV.28) e (IV.32), é obtida a superfície de Crisfield

$$F_c = Q_t + \frac{Q_m}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha \sqrt{3}} |Q_{tm}| = 1, \quad (\text{IV.42})$$

ou

$$F_c = \frac{\bar{N}}{\sigma_Y^2 t^2} + \frac{16 \bar{M}}{\alpha^2 \sigma_Y^2 t^4} + \frac{4 \sqrt{3} \bar{MN}}{\alpha \sqrt{3} \sigma_Y^2 t^3} = 1 \quad (\text{IV.43})$$

Observa-se que, quando  $\bar{K}_p \rightarrow \infty$ , tem-se  $\alpha = 1$ , e a superfície  $F_c$  coincide com  $F_I$ . Porém, se  $\bar{K}_p = 0$ , tem-se  $\alpha = \frac{2}{3}$ , e, nesse caso  $F_c$  assume o valor:

$$(F_c)_{\bar{K}_p=0} = Q_t + \frac{9}{4} Q_m + \frac{\sqrt{3}}{2} |Q_{tm}| = 1, \quad (\text{IV.44})$$

haverá então uma diferença no coeficiente do termo  $Q_{tm}$ , em relação a  $F_I$ . Essa diferença acarreta um retardamento no início do escoamento das fibras extremas, quando se utiliza a superfície de Crisfield, mas consegue-se uma melhor aproximação para valores intermediários de  $\bar{K}_p$ .

De modo a melhorar o comportamento inicial de escoamento, EIDSHEIM [26] apresentou uma modificação na equação (IV.43), introduzindo um parâmetro  $b$ , dado por

$$b = 1 - \left( 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) [1 - \alpha(\bar{K}_p)] , \quad (\text{IV.45})$$

ficando  $F_c$ , na forma



$$\frac{\bar{N}}{\sigma_Y^2 t^2} + \frac{16 \bar{M}}{\alpha^2 \sigma_Y^2 t^4} + \frac{4 \delta \bar{MN}}{b \sqrt{3} \sigma_Y^2 t^3} = 1 \quad (\text{IV.46})$$

### SUPERFÍCIE DE CRISFIELD PARA MATERIAIS COM ENDURECIMENTO

Tanto a formulação de Ilyushin, como a aproximação de Crisfield, foram desenvolvidas para materiais elasto-plásticos perfeitos.

Utilizando a equação (IV.46), EIDSHEIM [26] desenvolveu uma formulação, considerando o endurecimento isotrópico do material. Seguindo a hipótese de *work hardening*, Eidsheim adotou uma curva uniaxial "tensão-deformação" particular, onde a tensão, após o escoamento inicial, tende assintoticamente para um valor limite  $\sigma_L = 2 \cdot \sigma_Y$ . Esta formulação foi aplicada em alguns casos de solicitação por flexão e deformação axial em vigas.

No presente trabalho, adota-se a superfície original de Crisfield para materiais que apresentam a curva "tensão-deformação" da Figura (IV.5), já que esta superfície representa uma boa aproximação, mesmo quando as seções não estão totalmente plastificadas.

Como o módulo tangente elasto-plástico é constante, a função  $H'$  definida na equação (IV.24) também o é e, nesse caso, após ser atingida a tensão  $\sigma_Y$ , a tensão equivalente, será expressa por

$$\bar{\sigma} = \sigma_Y + H' \bar{\epsilon}_p, \quad (\text{IV.47})$$

onde, para materiais elasto-plásticos perfeitos,  $H'$  será nula.

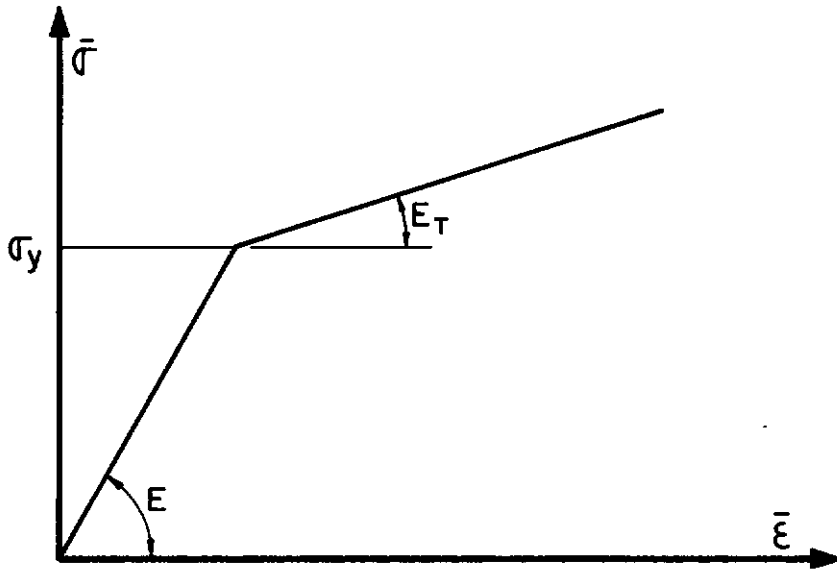


Figura IV.5

Reescrevendo a equação (IV.43), como

$$\left( \frac{\bar{N}}{t^2} + \frac{16 \bar{M}}{\alpha^2 t^4} + \frac{4 \delta \bar{MN}}{\alpha \sqrt{3} t^3} \right)^{1/2} = \sigma_Y \quad (\text{IV.48})$$

é possível introduzir o conceito de tensão equivalente, definida pela lado esquerdo da equação (IV.48), ou seja:

$$\bar{\sigma} = \left( \frac{\bar{N}}{t^2} + \frac{16 \bar{M}}{\alpha^2 t^4} + \frac{4 \delta \bar{MN}}{\alpha \sqrt{3} t^3} \right)^{1/2} \quad (\text{IV.49})$$

Com a substituição da tensão  $\sigma_Y$  pela função de endurecimento  $H$  (equação (IV.16)), que nesse caso será dependente das deformações e curvaturas plásticas, isto é,

$$H = f(\underline{\epsilon}_p, \underline{k}_p) \quad , \quad (\text{IV.50})$$

a superfície de escoamento será dada por

$$F = \bar{\sigma}(\underline{n}, \underline{m}, \underline{k}_p) - H(\underline{\epsilon}_p, \underline{k}_p) = 0 \quad , \quad (\text{IV.51})$$

onde  $\underline{n}$  e  $\underline{m}$ , são os vetores que contêm os esforços por unidade de comprimento, definidos em (III.40) e (III.41).

### IV.3 - DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES ELASTO-PLÁSTICAS

A partir da equação (IV.51), pode-se escrever

$$dF = 0 \quad , \quad (IV.52)$$

ou seja,

$$d\bar{\sigma} = dH \quad , \quad (IV.53)$$

e, então, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \partial \bar{\sigma} \\ \partial \underline{n} \end{bmatrix}^T \cdot d\underline{n} + \begin{bmatrix} \partial \bar{\sigma} \\ \partial \underline{m} \end{bmatrix}^T \cdot d\underline{m} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{k}_p} \cdot d\bar{k}_p = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_p} \cdot d\varepsilon_p + \frac{\partial H}{\partial k_p} \cdot dk_p \quad (IV.54)$$

Denotando por

$$\underline{F}_n = \begin{bmatrix} \partial \bar{\sigma} \\ \partial \underline{n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_m = \begin{bmatrix} \partial \bar{\sigma} \\ \partial \underline{m} \end{bmatrix} \quad ,$$

(IV.55)

obtem-se, a partir da equação (IV.49), que:

$$\underline{F}_n = \frac{1}{t^2} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \underline{n}} \right\} + \frac{2 \Delta}{\alpha \sqrt{3} t^3} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{M}}{\partial \underline{m}} \right\}$$

$$\underline{F}_m = \frac{2 \Delta}{\alpha \sqrt{3} t^3} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \underline{n}} \right\} + \frac{16}{\alpha^2 t^4} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{M}}{\partial \underline{m}} \right\}$$

(IV.56)

Indicando por:

$$a = \frac{1}{t^2}$$

$$b = \frac{2 \Delta}{\alpha \sqrt{3} t^3}$$

$$c = \frac{16}{\alpha^2 t^4},$$

(IV.57)

e utilizando-se os invariantes de esforços definidos em (IV.27), determinam-se explicitamente os vetores  $\underline{F}_n$  e  $\underline{F}_m$  em função dos esforços:

$$\underline{F}_n = \left\{ \begin{array}{l} a(2N_x - N_y) + b(2M_x - M_y) \\ a(2N_y - N_x) + b(2M_y - M_x) \\ a(6N_{xy}) + b(6M_{xy}) \end{array} \right\}$$

(IV.58)

$$\bar{F}_m = \begin{Bmatrix} b(2 N_X - N_Y) + c(2 M_X - M_Y) \\ b(2 N_Y - N_X) + c(2 M_Y - M_X) \\ b(6 N_{XY}) + c(6 M_{XY}) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.58})$$

A derivada da tensão equivalente, em relação à curvatura plástica equivalente, é obtida através da função  $\alpha$ , isto é,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{k}_p} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{k}_p} \quad (\text{IV.59})$$

Denotando-se  $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \alpha}$  e  $\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{k}_p}$  por VA e VC, respectivamente, vem:

$$VA = - \frac{4 \delta \bar{M} \bar{N}}{\alpha^2 \sqrt{3} t^3} - \frac{32 \bar{M}}{\alpha^3 t^4} \quad (\text{IV.60})$$

$$VC = \frac{4}{9} \cdot \frac{E \cdot t}{\sigma_y} \cdot \exp \left( - \frac{4}{3} \cdot \frac{E \cdot t}{\sigma_y} \cdot \bar{k}_p \right) \quad (\text{IV.61})$$

Logo,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{k}_p} = VA \cdot VC \quad (\text{IV.62})$$

A curvatura plástica equivalente pode ser calculada pela somatória dos incrementos de curvatura, ou seja,

$$\bar{k}_p = \Sigma d\bar{k}_p, \quad (\text{IV.63})$$

onde

$$d\bar{k}_p^2 = \frac{4}{3} \left( dk_{p_x}^2 + dk_{p_y}^2 + dk_{p_x} \cdot dk_{p_y} + \frac{dk_{p_{xy}}^2}{4} \right) \quad (\text{IV.64})$$

A partir da condição de normalidade, pode-se escrever:

$$d\varepsilon_{-p} = d\lambda \cdot \underline{F}_n$$

$$dk_{-p} = d\lambda \cdot \underline{F}_m ,$$

(IV.65)

que, com a substituição da equação (IV.58) e com a utilização de (IV.64), resulta em

$$d\bar{k}_p = VB \cdot d\lambda , \quad (\text{IV.66})$$

onde

$$VB = 2 \sqrt{b^2 \cdot \bar{N} + c^2 \cdot \bar{M} + 2 \cdot b \cdot c \cdot \bar{MN}} , \quad (\text{IV.67})$$

Substituindo-se as equações (IV.55), (IV.62) e (IV.66) em (IV.54), obtém-se

$$\underline{F}_n^T \cdot d\underline{n} + \underline{F}_m^T \cdot d\underline{m} + VA \cdot VB \cdot VC \cdot d\lambda = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{-p}} \cdot d\varepsilon_{-p} + \frac{\partial H}{\partial k_{-p}} \cdot dk_{-p} \quad (\text{IV.68})$$

ou, equivalentemente,

$$\underline{F}_n^T \cdot d\underline{n} + \underline{F}_m^T \cdot d\underline{m} + VA \cdot VB \cdot VC \cdot d\lambda = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{-p}} \cdot d\lambda \cdot \underline{F}_n + \frac{\partial H}{\partial k_{-p}} \cdot d\lambda \cdot \underline{F}_m \quad (\text{IV.69})$$

Logo, o coeficiente  $d\lambda$  é dado por

$$d\lambda = \frac{\tilde{F}_n^T \cdot d\tilde{n} + \tilde{F}_m^T \cdot d\tilde{m}}{\frac{\partial H}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \cdot \tilde{F}_n + \frac{\partial H}{\partial \tilde{k}_p} \cdot \tilde{F}_m - VA \cdot VB \cdot VC} \quad (IV.70)$$

De acordo com as equações (III.40) e (III.41), os incrementos  $d\tilde{n}$  e  $d\tilde{m}$ , são escritos na forma:

$$\begin{aligned} d\tilde{n} &= \tilde{DM} \cdot \{d\tilde{\epsilon}_t - d\tilde{\epsilon}_p\} \\ d\tilde{m} &= \tilde{DB} \cdot \{d\tilde{k}_t - d\tilde{k}_p\} , \end{aligned} \quad (IV.71)$$

sendo  $d\tilde{\epsilon}_t$  e  $d\tilde{k}_t$ , os incrementos totais de deformação e curvatura, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} d\tilde{\epsilon}_t &= d\tilde{\epsilon}_e + d\tilde{\epsilon}_p \\ d\tilde{k}_t &= d\tilde{k}_e + d\tilde{k}_p . \end{aligned} \quad (IV.72)$$

Recorrendo-se à equação (IV.65), chega-se às equações

$$\begin{aligned} d\tilde{n} &= \tilde{DM} \cdot \{d\tilde{\epsilon}_t - d\lambda \cdot \tilde{F}_n\} \\ d\tilde{m} &= \tilde{DB} \cdot \{d\tilde{k}_t - d\lambda \cdot \tilde{F}_m\} \end{aligned} \quad (IV.73)$$

que, quando substituídas em (IV.69), fornecem

$$d\lambda \cdot [i + j - (VA \cdot VB \cdot VC) + H_1 + H_2] = \tilde{F}_n^T \cdot \tilde{DM} \cdot d\tilde{\epsilon}_t + \tilde{F}_m^T \cdot \tilde{DB} \cdot d\tilde{k}_t \quad (IV.74)$$

onde:

$$i = \underline{\underline{F}}_n^T \cdot \underline{\underline{D}}_M \cdot \underline{\underline{F}}_n$$

$$j = \underline{\underline{F}}_m^T \cdot \underline{\underline{D}}_B \cdot \underline{\underline{F}}_m ,$$

(IV.75)

e

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}_p} \cdot \underline{\underline{F}}_n$$

$$H_2 = \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{k}}_p} \cdot \underline{\underline{F}}_m .$$

(IV.76)

Dessa forma, obtêm-se  $d\lambda$  em função dos incrementos totais de de formação:

$$d\lambda = \frac{1}{i + j - (VA \cdot VB \cdot VC) + H_1 + H_2} \cdot \{ \underline{\underline{F}}_n^T \cdot \underline{\underline{D}}_M \cdot d\underline{\underline{\epsilon}}_t + \underline{\underline{F}}_m^T \cdot \underline{\underline{D}}_B \cdot d\underline{\underline{k}}_t \}$$

(IV.77)

Para se determinar  $H_1$  e  $H_2$ , utiliza-se o conceito de trabalho plástico, definido pela equação

$$dW_p = t \cdot \bar{\sigma} \cdot d\bar{\epsilon}_p = \underline{\underline{n}}^T \cdot d\underline{\underline{\epsilon}}_p + \underline{\underline{m}}^T \cdot d\underline{\underline{k}}_p ;$$

(IV.78)

assim, o incremento de deformação plástica equivalente,  $d\bar{\epsilon}_p$ , é dado por

$$d\bar{\epsilon}_p = \frac{1}{t \cdot \bar{\sigma}} \cdot \{ \underline{\underline{n}}^T \cdot d\underline{\underline{\epsilon}}_p + \underline{\underline{m}}^T \cdot d\underline{\underline{k}}_p \} ,$$

(IV.79)



ou, tendo em vista (IV.65), por

$$d\bar{\epsilon}_p = \frac{d\lambda}{t \cdot \bar{\sigma}} \cdot \{ \underline{n}^T \cdot \underline{F}_n + \underline{m}^T \cdot \underline{F}_m \} \quad . \quad (\text{IV.80})$$

É possível, ainda, escrever as derivadas da função H em relação às deformações plásticas:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{\epsilon}_p} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\epsilon}_p} \cdot \frac{\partial \bar{\epsilon}_p}{\partial W_p} \cdot \frac{\partial W_p}{\partial \bar{\epsilon}_p} = H' \cdot \frac{1}{t \cdot \bar{\sigma}} \cdot \underline{n}^T \quad (\text{IV.81})$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial k_p} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\epsilon}_p} \cdot \frac{\partial \bar{\epsilon}_p}{\partial W_p} \cdot \frac{\partial W_p}{\partial k_p} = H' \cdot \frac{1}{t \cdot \bar{\sigma}} \cdot \underline{m}^T \quad , \quad (\text{IV.82})$$

onde H' é calculada através da equação (IV.24).

Substituindo-se, então, as equações (IV.81) e (IV.82) em (IV.76), obtém-se:

$$H_1 = \frac{H'}{t \cdot \bar{\sigma}} \cdot \underline{n}^T \cdot \underline{F}_n$$

$$H_2 = \frac{H'}{t \cdot \bar{\sigma}} \cdot \underline{m}^T \cdot \underline{F}_m$$

(IV.83)

Recorrendo-se à condição de normalidade e ao coeficiente  $d\lambda$ , dado em (IV.77), as equações (IV.65) resultam em:

$$\underline{d\varepsilon}_{\underline{p}} = \frac{1}{\underline{i} + \underline{j} - (\underline{VA} \cdot \underline{VB} \cdot \underline{VC}) + H_1 + H_2} \cdot \{\underline{F}_{\underline{n}}^T \cdot \underline{DM} \cdot d\underline{\varepsilon}_{\underline{t}} + \underline{F}_{\underline{m}}^T \cdot \underline{DB} \cdot d\underline{k}_{\underline{t}}\} \cdot \underline{F}_{\underline{n}}$$

$$\underline{dk}_{\underline{p}} = \frac{1}{\underline{i} + \underline{j} - (\underline{VA} \cdot \underline{VB} \cdot \underline{VC}) + H_1 + H_2} \cdot \{\underline{F}_{\underline{n}}^T \cdot \underline{DM} \cdot d\underline{\varepsilon}_{\underline{t}} + \underline{F}_{\underline{m}}^T \cdot \underline{DB} \cdot d\underline{k}_{\underline{t}}\} \cdot \underline{F}_{\underline{m}}$$

(IV.84)

Usando-se as notações

$$\underline{L}_{\underline{n}} = \underline{F}_{\underline{n}} \cdot \underline{F}_{\underline{n}}^T$$

$$\underline{L}_{\underline{m}} = \underline{F}_{\underline{m}} \cdot \underline{F}_{\underline{m}}^T$$

$$\underline{L}_{\underline{nm}} = \underline{F}_{\underline{n}} \cdot \underline{F}_{\underline{m}}^T ,$$

(IV.85)

obtêm-se:

$$\underline{d\varepsilon}_{\underline{p}} = \frac{1}{\underline{i} + \underline{j} - (\underline{VA} \cdot \underline{VB} \cdot \underline{VC}) + H_1 + H_2} \cdot \{\underline{L}_{\underline{n}} \cdot \underline{DM} \cdot d\underline{\varepsilon}_{\underline{t}} + \underline{L}_{\underline{nm}} \cdot \underline{DB} \cdot d\underline{k}_{\underline{t}}\}$$

$$\underline{dk}_{\underline{p}} = \frac{1}{\underline{i} + \underline{j} - (\underline{VA} \cdot \underline{VB} \cdot \underline{VC}) + H_1 + H_2} \cdot \{\underline{L}_{\underline{nm}}^T \cdot \underline{DM} \cdot d\underline{\varepsilon}_{\underline{t}} + \underline{L}_{\underline{m}} \cdot \underline{DB} \cdot d\underline{k}_{\underline{t}}\}$$

(IV.86)

A substituição de (IV.86) em (IV.71), conduz às relações entre os incrementos de esforços e deformações, as quais são dadas por:

$$\begin{aligned}
 d\bar{n} &= \bar{D}\bar{M} \cdot \left\{ d\bar{\varepsilon}_t - \frac{1}{i + j - (VA \cdot VB \cdot VC) + H_1 + H_2} \cdot \{ \bar{L}_n \cdot \bar{D}\bar{M} \cdot d\bar{\varepsilon}_t + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{L}_{nm} \cdot \bar{D}\bar{B} \cdot d\bar{k}_t \} \right\} \\
 d\bar{m} &= \bar{D}\bar{B} \cdot \left\{ d\bar{k}_t - \frac{1}{i + j - (VA \cdot VB \cdot VC) + H_1 + H_2} \cdot \{ \bar{L}_{nm}^T \cdot \bar{D}\bar{M} \cdot d\bar{\varepsilon}_t + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{L}_m \cdot \bar{D}\bar{B} \cdot d\bar{k}_t \} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{IV.87}$$

Essas relações podem ser escritas na forma:

$$d\bar{n} = \bar{D}\bar{E} \cdot d\bar{\varepsilon}_t + \bar{D}\bar{E}\bar{F} \cdot d\bar{k}_t$$

$$d\bar{m} = \bar{D}\bar{E}\bar{F}^T \cdot d\bar{\varepsilon}_t + \bar{D}\bar{F} \cdot d\bar{k}_t ,$$

(IV.88)

ou

$$\begin{Bmatrix} d\bar{n} \\ d\bar{m} \end{Bmatrix} = \bar{D}_{ep} \cdot \begin{Bmatrix} d\bar{\varepsilon}_t \\ d\bar{k}_t \end{Bmatrix} ,$$

(IV.89)

onde  $\bar{D}_{ep}$  é a matriz elasto-plástica, conforme equação (IV.9), formada pelas matrizes da equação (IV.88), ou seja,

$$\bar{D}_{ep} = \begin{bmatrix} \bar{D}\bar{E} & \bar{D}\bar{E}\bar{F} \\ \bar{D}\bar{E}\bar{F}^T & \bar{D}\bar{F} \end{bmatrix} ,
 \tag{IV.90}$$

com:

$$\underline{DE} = \underline{DM} \cdot \left[ \underline{I} - \frac{1}{i + j - (VA \cdot VB \cdot VC) + H_1 + H_2} \cdot \underline{Ln} \cdot \underline{DM} \right]$$

$$\underline{DF} = \underline{DB} \cdot \left[ \underline{I} - \frac{1}{i + j - (VA \cdot VB \cdot VC) + H_1 + H_2} \cdot \underline{Lm} \cdot \underline{DB} \right]$$

$$\underline{DEF} = - \frac{1}{i + j - (VA \cdot VB \cdot VC) + H_1 + H_2} \underline{DM} \cdot \underline{Lnm} \cdot \underline{DB} , \quad (IV.91)$$

sendo  $\underline{I}$ , a matriz identidade (3x3).

#### IV.4 - EQUAÇÕES ELASTO-PLÁSTICAS PARA GRANDES DEFLEXÕES

A formulação de grandes deflexões em estruturas de superfície, com materiais que têm comportamento elasto-plástico, pode ser obtida com a combinação das equações desenvolvidas nos Capítulos III e IV.

Para a combinação de não-linearidade geométrica e física, é necessária a determinação da matriz de rigidez tangente e do vetor das forças nodais internas, utilizando, porém, as relações elasto-plásticas entre esforços e deformações.

##### MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Como foi visto no Capítulo III, a matriz de rigidez tan-

gente relaciona incrementos de força e deslocamento, conforme equação (III.23):

$$d\underline{F} = \underline{K}_T \cdot d\underline{\delta} \quad .$$

De acordo com a equação (III.37), tal matriz é calculada, no regime elástico, por

$$\underline{K}_T = \int_V (\underline{B}'^T \cdot \underline{D}' \cdot \underline{B}' + \underline{G}^T \cdot \underline{T}' \cdot \underline{G}) \, dv \quad (\text{IV.92})$$

A matriz  $\underline{B}'$  é dada em (III.27), porém  $\underline{D}'$  deve ser substituída pela matriz  $\underline{D}_{ep}$ , já que após a integração ao longo da espessura, a matriz  $\underline{K}_T$  resulta da integração da área do elemento, e as relações constitutivas ficam em função dos esforços (equação (IV.89)). Assim, a matriz  $\underline{K}_T$ , será expressa por

$$\underline{K}_T = \int_A \left( \begin{bmatrix} \underline{B}_1^T & \underline{0} \\ \underline{B}_S^T & \underline{B}_2^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{D}_E & \underline{D}_{EF} \\ \underline{D}_{EF}^T & \underline{D}_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{B}_S \\ \underline{0} & \underline{B}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{G}^T \cdot \underline{M}' \cdot \underline{G} \end{bmatrix} \right) \cdot dA \quad , \quad (\text{IV.93})$$

Desenvolvendo (IV.93), obtêm-se, finalmente, a matriz  $\underline{K}_T$ :

$$\underline{K}_T = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii} & \underline{K}_{i0}^T \\ \underline{K}_{i0} & \underline{K}_{00} \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{IV.94})$$

sendo

$$\underline{K}_{ii} = \int_A (\underline{B1}^T \cdot \underline{DE} \cdot \underline{B1}) \cdot dA$$

$$\begin{aligned} \underline{K}_{00} = \int_A & (\underline{B2}^T \cdot \underline{DF} \cdot \underline{B2} + \underline{BS}^T \cdot \underline{DE} \cdot \underline{BS} + \underline{B2}^T \cdot \underline{DEF}^T \cdot \underline{BS} + \\ & + \underline{BS}^T \cdot \underline{DEF} \cdot \underline{B2} + \underline{G}^T \cdot \underline{M}' \cdot \underline{G}) \cdot dA \end{aligned}$$

$$\underline{K}_{i0} = \int_A (\underline{BS}^T \cdot \underline{DE} \cdot \underline{B1} + \underline{B2}^T \cdot \underline{DEF}^T \cdot \underline{B1}) \cdot dA$$

(IV.95)

### VETOR DE FORÇAS NODAIS INTERNAS

O vetor de forças nodais internas é calculado através das mesmas equações desenvolvidas no Capítulo III, ou seja,

$$\underline{F} = \int_V \underline{B}'^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dv ,$$

que, após a integração ao longo da espessura, resulta em

$$\underline{F} = \int_A \left( \begin{Bmatrix} \underline{B1}^T \cdot \underline{n} \\ \underline{BS}^T \cdot \underline{n} + \underline{B2}^T \cdot \underline{m} \end{Bmatrix} \right) \cdot dA .$$

Note-se que os esforços podem estar no regime plástico e, portanto, são determinados a partir das relações elasto-plásticas.

## V - RESULTADOS DE ANÁLISES

Neste capítulo, apresentam-se os resultados numéricos obtidos através da análise com o elemento desenvolvido de alguns exemplos. Esses resultados são comparados com as soluções apresentadas por diversos autores.

Nas quatro primeiras análises, obtém-se a resposta de estruturas de superfície sujeitas a cargas estáticas. Primeiramente, faz-se o estudo de não-linearidade geométrica de uma casca esférica e uma placa.

A seguir, é apresentada a análise elasto-plástica de uma casca cilíndrica e de uma calota esférica, respectivamente.

No quinto exemplo, determinam-se as frequências naturais de uma viga engastada, onde procura-se comparar os resultados obtidos utilizando-se as matrizes de massa consistentes, com as matrizes agrupadas. Verifica-se, ainda, nesse exemplo, o efeito do termo da matriz de massa associado aos graus de liberdade de rotação.

Finalmente, faz-se a análise dinâmica de uma placa simplesmente apoiada de material elasto-plástico perfeito.

Os resultados e comparações estão a seguir.

## V.1 - ANÁLISE ESTATICA

### a) Não-linearidade geométrica

#### CASCA ESFÉRICA SIMPLEMENTE APOIADA

A casca esférica de projeção quadrada no plano horizontal, simplesmente apoiada nos bordos, está sujeita a uma carga concentrada vertical no centro, conforme Figura (V.1).

Devido à simetria, analisou-se apenas uma quarta parte da estrutura, utilizando-se uma malha de (4x4). Apesar dessa malha não ser muito refinada, obteve-se uma solução próxima das de outros autores.

A Figura (V.1) indica a variação do deslocamento do ponto central da casca em relação à carga, para a análise efetuada e para a solução apresentada por esses autores.

LEICESTER [29] obteve a resposta com uma solução analítica através de séries, enquanto MATSUI [30], bem como BERGAN [31], utilizaram o método dos Elementos Finitos, porém com formulações diferentes. Esse problema também foi analisado por DHATT [32] e por BATHE [33] com soluções semelhantes.

Neste estudo, o método adotado para a resolução do sistema de equações não lineares foi o de Newton-Raphson, com tolerância fixada em 1%. A partir do terceiro incremento de carga utilizou-se controle de deslocamento, com incrementos iguais de 25 mm, como pode-se observar na Tabela (V.1). Consegue-se, assim, traçar a curva da Figura (V.1), mesmo com a perda de rigidez da casca.



$R_1 = R_2 = 2.540 \text{ mm}$   
 $a = b = 784,9 \text{ mm}$   
 $h = 99,45 \text{ mm}$   
 $E = 68,95 \text{ N/mm}^2$   
 $\nu = 0,3$

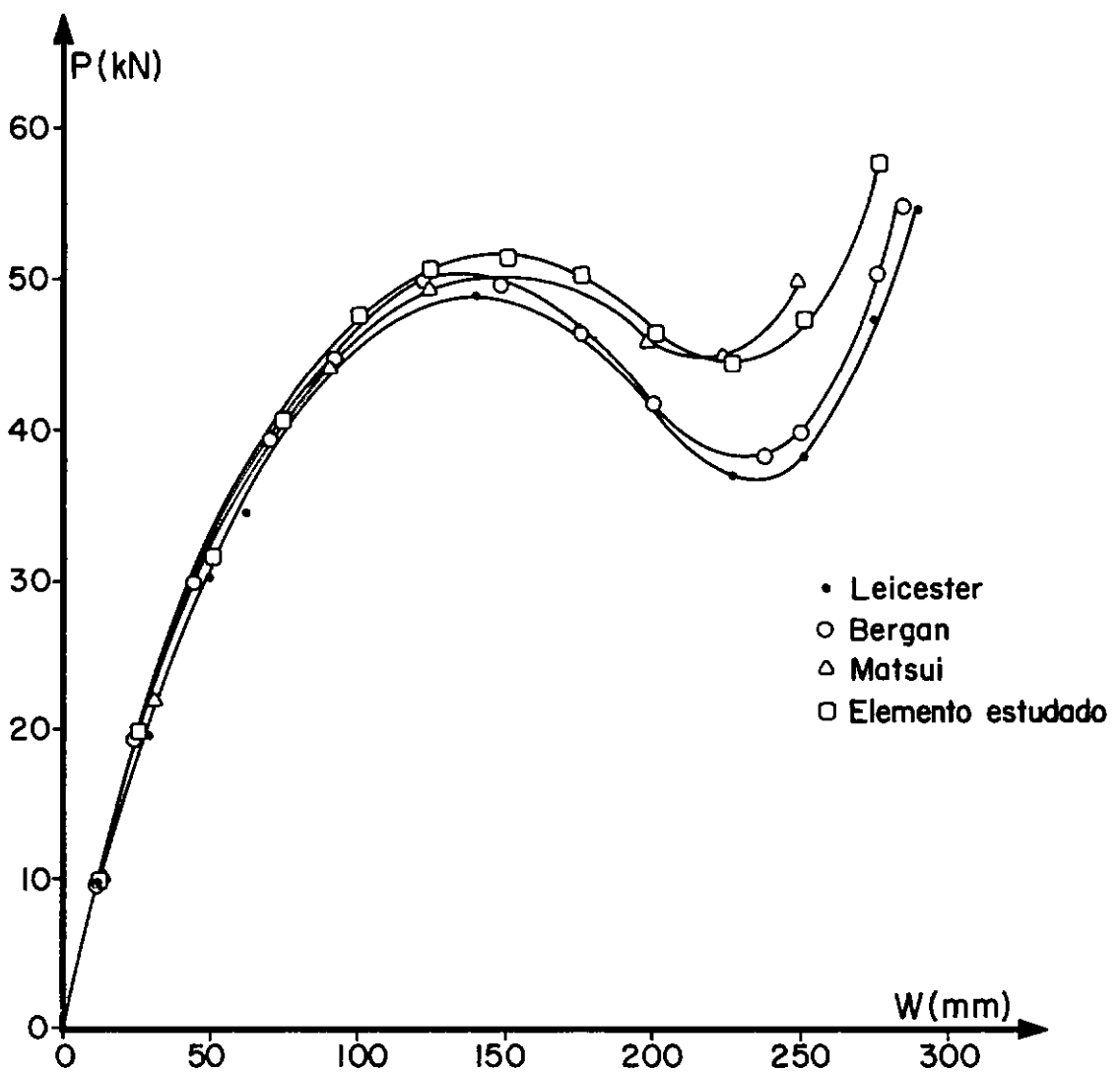
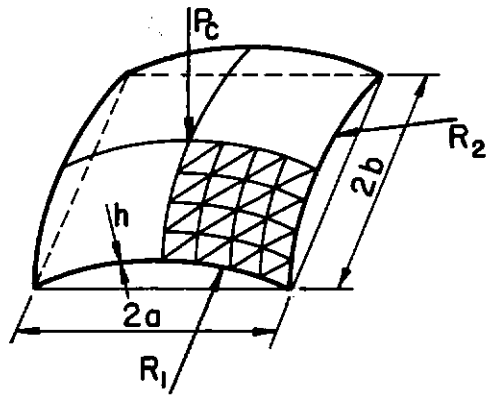


Figura V.1

Tabela (V.1)

P (KN)	W (mm)
10.	- 12.54
20.	- 27.47
30.	- 50.34
41.29	- 75.34
47.62	- 100.34
51.17	- 125.34
52.37	- 150.34
50.63	- 175.34
47.23	- 200.34
44.93	- 225.34
47.82	- 250.34
58.54	- 275.34

## PLACA APOIADA SUJEITA À CARGA EM SEU PLANO

O objetivo deste estudo é a análise do comportamento pós flambagem de uma placa simplesmente apoiada.

As características geométricas e propriedades elásticas do material, bem como a malha utilizada na discretização, estão indicadas na Figura (V.2).

Considera-se que os apoios impedem os deslocamentos transversais, porém deixam livres os deslocamentos no plano da placa.

Um carregamento axial de compressão uniformemente distribuído é aplicado ao longo de duas extremidades. Entretanto, para a determinação da curva que mostra a variação dos deslocamentos com a carga axial, uma pequena força vertical é aplicada no ponto central da placa.

Esse procedimento foi proposto por ARGYRIS [34], de modo a avaliar a singularidade para a carga crítica. Essa força vertical é proporcional ao carregamento axial, atingindo o valor máximo igual a 0,2 N, quando esse alcança três vezes o valor crítico.

A Tabela (V.2) apresenta os deslocamentos longitudinais de um ponto da borda e os deslocamentos transversais do ponto central da placa, para alguns níveis de carga.

Os resultados obtidos são comparados com a solução da referência [34], através da Figura (V.3), que indica os deslocamentos verticais do ponto central da placa, em função da carga.

Nesse gráfico, a carga crítica que serve de referência,

é dada por TIMOSHENKO [35], e resulta em uma tensão normal crítica igual a 19.20 MPa.

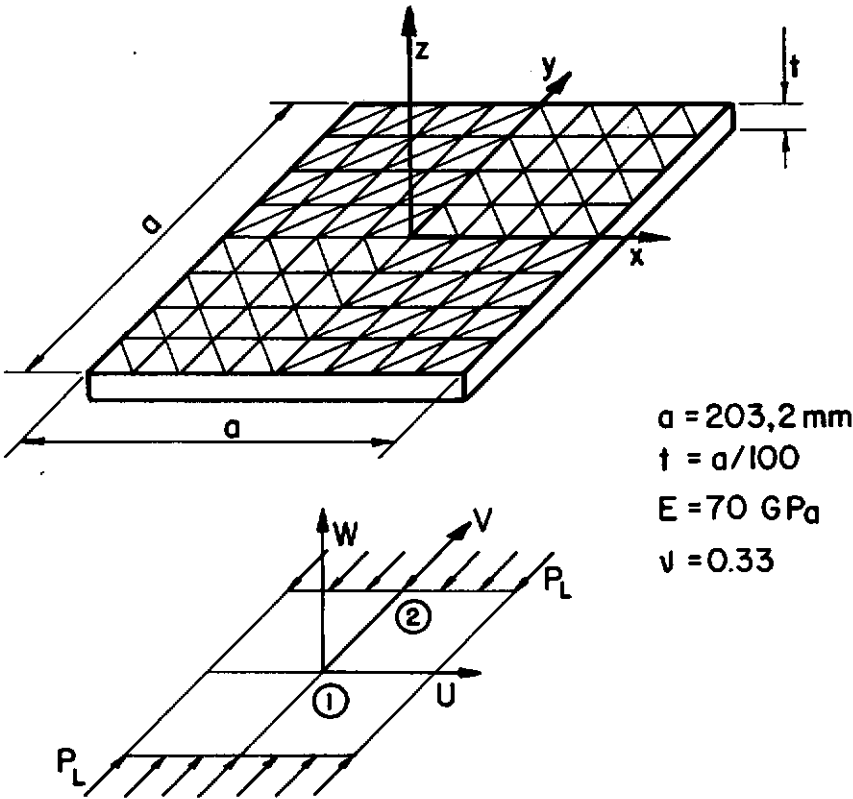


Figura V.2

Tabela (V.2)

$P_L \text{ (N/mm)}$	$W_1 \text{ (mm)} \times 10^2$	$V_2 \text{ (mm)} \times 10^2$
17.5	1.12	1.13
26.25	2.88	1.69
35.0	14.82	2.27
43.75	84.45	3.15
61.25	160.19	5.15
78.75	210.99	7.18
96.25	252.04	9.24

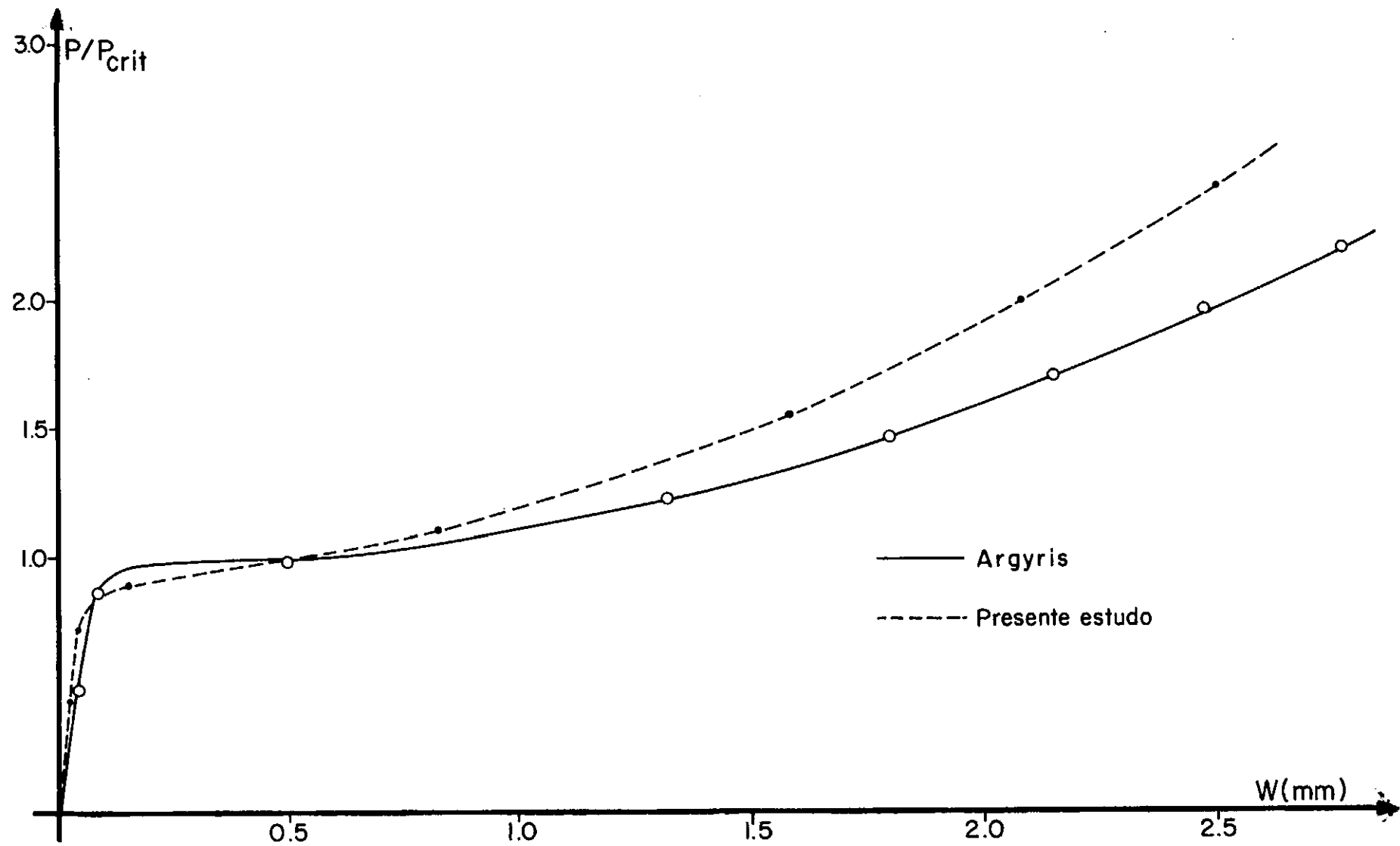


Figura V.3

## b) Não-linearidade física

### CASCA CILÍNDRICA APOIADA EM DIAFRAGMAS

A casca cilíndrica com propriedades físicas e dimensões geométricas apresentada na Figura (V.4), é submetida a um carregamento distribuído uniforme vertical. O material da casca é elasto-plástico perfeito e, devido à simetria, foi analisada apenas uma quarta parte da estrutura com uma malha (4x5).

Este problema foi estudado por diversos autores, sendo que DUPUIS [36], bem como BÄCKLUND [37], levaram em consideração apenas a não-linearidade do material.

BERGAN [31] e ARGYRIS [38] apresentam solução do problema levando em consideração, também, o efeito de não-linearidade geométrica. Porém, como pode-se notar na Figura (V.5), onde aparece o deslocamento vertical do ponto central na borda livre (ponto B) em função da carga, o efeito de não-linearidade geométrica não é significativo na solução do problema.

No presente estudo, utilizou-se o método de Newton-Raphson, porém sem atualizar a matriz de rigidez, conseguindo-se, portanto, considerável economia de tempo de processamento.

Verifica-se, em cada iteração, apenas o vetor de forças nodais equivalentes, o que acarreta um número maior de iterações para se atingir a convergência em um determinado incremento de carga. Isso, todavia, é recompensado, já que calcula-se a matriz de rigidez tangente apenas na primeira iteração, sendo essa, a matriz de rigidez linear da estrutura.

Na Figura (V.6), mostra-se a progressão da plasticidade

nos pontos de integração em função de alguns níveis de carga. Procura-se comparar essa progressão com os resultados da referência [37], apresentados na Figura (V.7); nessa figura, os números indicados em cada elemento representam a quantidade de camadas plastificadas nos pontos de integração numérica.

O modelo utilizado por BÄCKLUND [37] segue o critério de von Mises, e cada elemento é dividido em dez camadas paralelas à superfície média, de modo a levar em conta o escoamento parcial ao longo da espessura da casca.

No elemento desenvolvido, o estudo é reduzido à superfície média, mas verifica-se que há conformidade entre as regiões que atingiram a plasticidade.

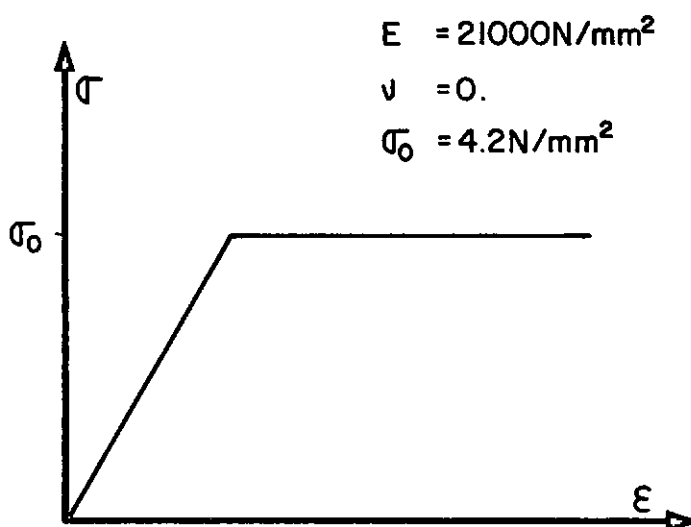
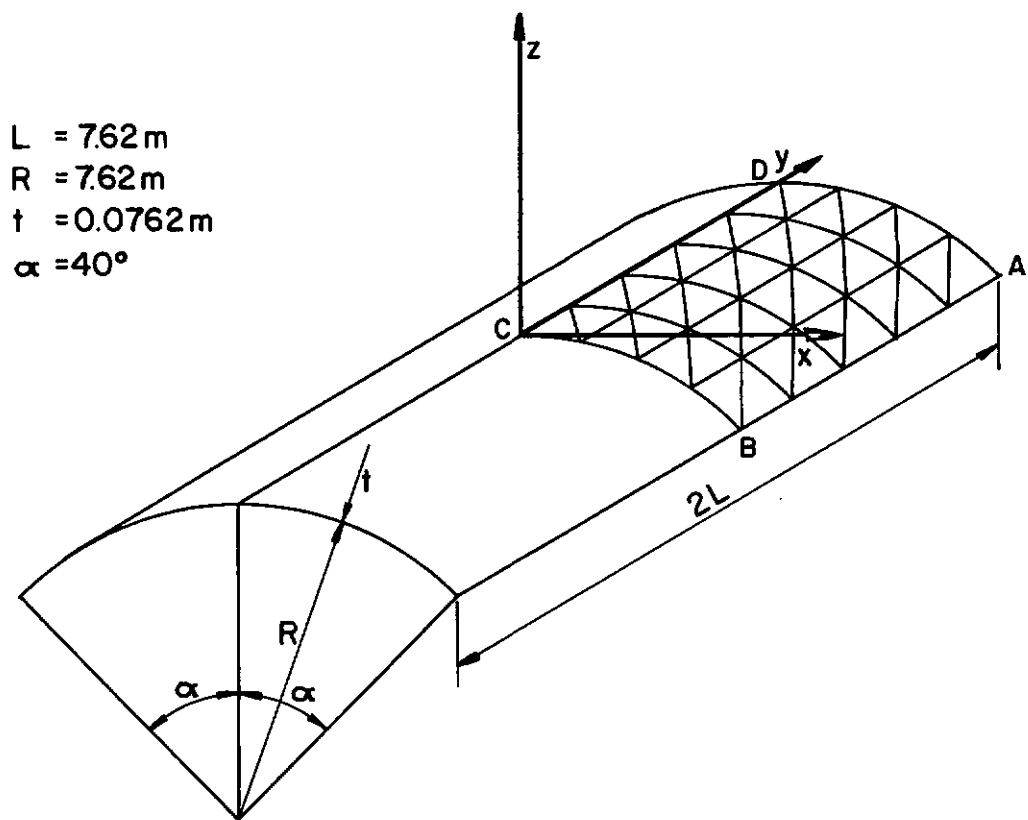


Figura V.4



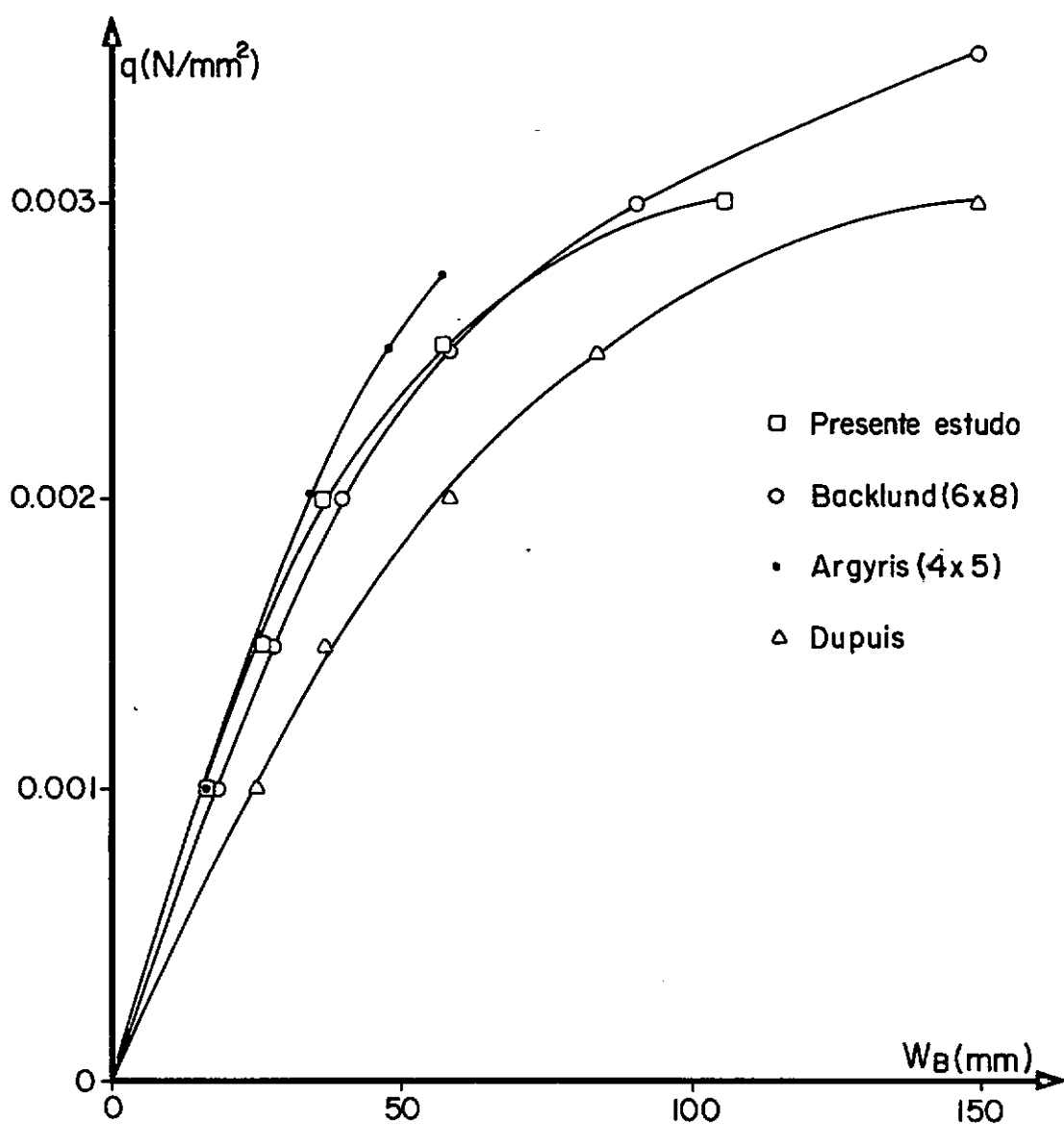
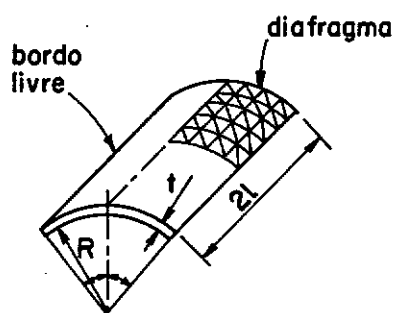


Figura V.5

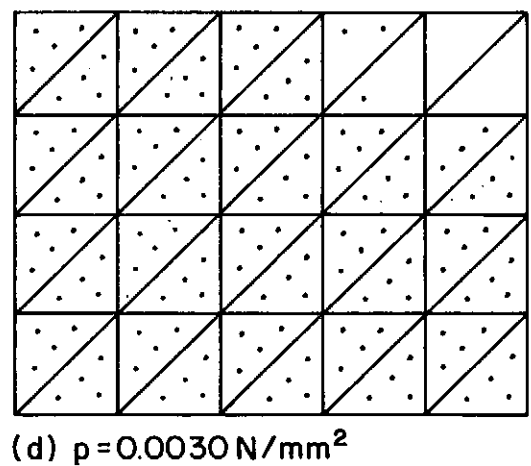
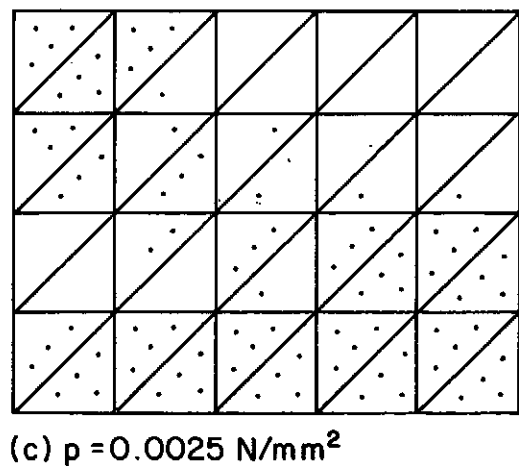
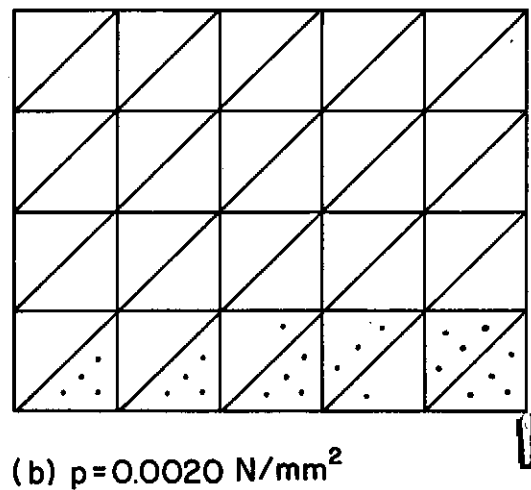
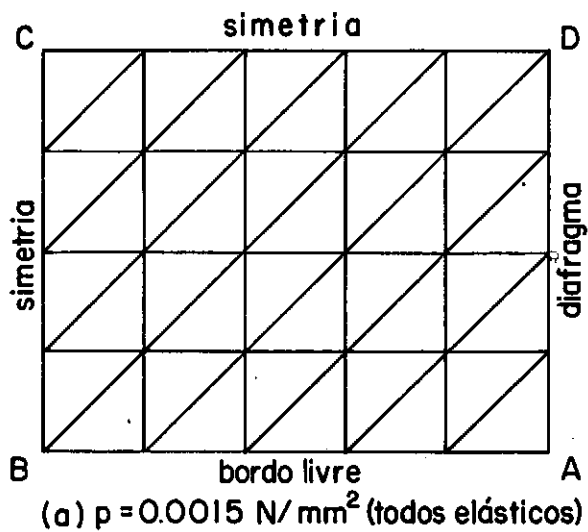


Fig.V.6 \_PONTOS DE INTEGRAÇÃO PLASTIFICADOS

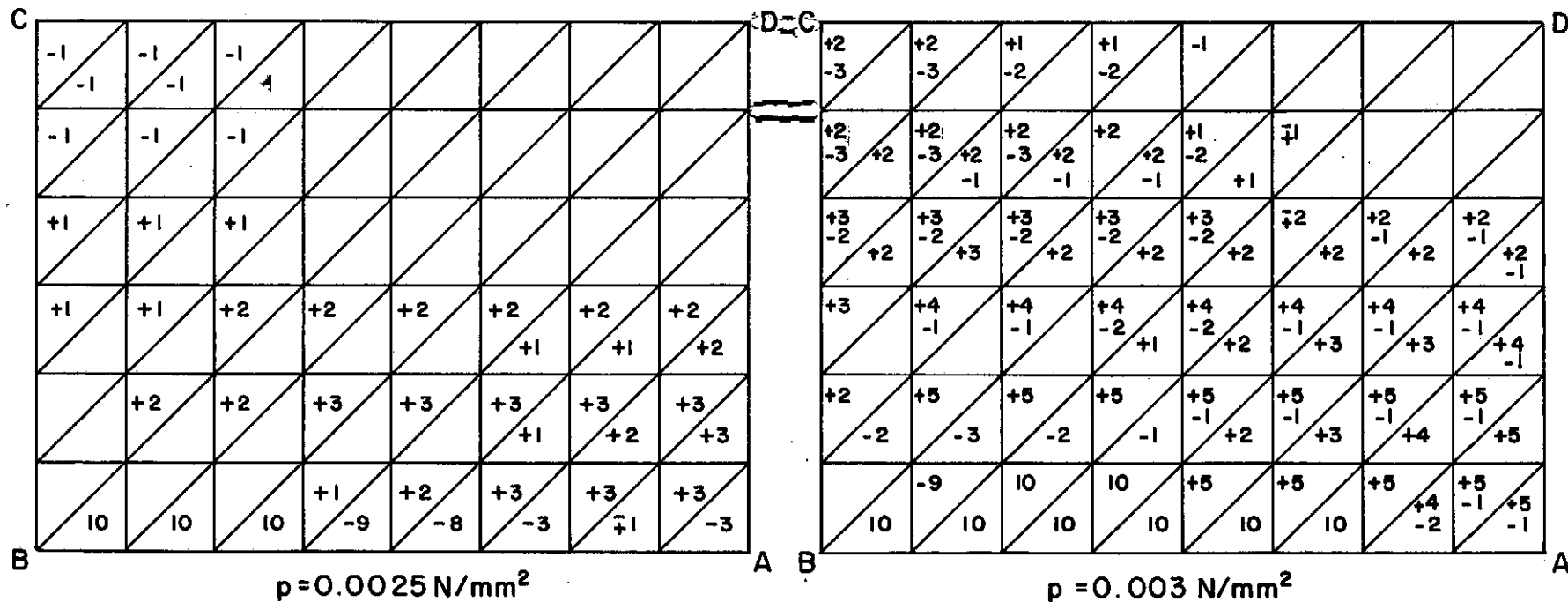


Fig.V.7\_NÚMERO DE CAMADAS PLASTIFICADAS PARA DOIS NÍVEIS DE CARGA

## CALOTA ESFÉRICA ENGASTADA

Este exemplo tem como objetivo verificar o comportamento da superfície de escoamento desenvolvida no presente estudo e, para isso, comparam-se os resultados obtidos com elementos que empregam outras formulações.

A calota esférica engastada sujeita a uma carga uniforme vertical, é analisada utilizando-se a malha indicada na Figura (V.8). A plasticidade do material da casca obedece o critério de escoamento de von Mises, sendo apresentada uma solução supondo o material elasto-plástico perfeito, e uma segunda, considerando o endurecimento do material após a plastificação.

Na Figura (V.9) mostra-se a variação do deslocamento central em função da carga, para os dois casos. Os resultados são comparados com as soluções obtidas por LANDAU [39], onde a casca foi analisada com elementos Axi-simétricos e com elementos Tri-dimensionais degenerados.

As diferenças verificadas nas soluções são aceitáveis, já que as formulações são diferentes; tanto o elemento degenerado, como o axi-simétrico, apresentam integração ao longo da espessura, ao passo que o elemento desenvolvido possui pontos de integração apenas na superfície.

Além disso, o método para a solução do sistema adotado pelos autores foi o incremental, com incrementos de carga de 2,5 psi. Neste estudo, adota-se Newton-Raphson com incrementos variáveis, não havendo necessidade de atualizar a matriz de rigidez.

Consegue-se, assim, uma solução satisfatória, com um tem

po de processamento relativamente reduzido.

A seguir, estão indicados, na Figura (V.10), os pontos plastificados da superfície, bem como a configuração deformada, para um nível de carga igual a 61,95 psi.

Finalmente, a Figura (V.11) apresenta a variação do momento fletor  $M_x$  ao longo da casca, para o mesmo nível de carga, nos casos elástico e elasto-plástico perfeito.

Na Tabela (V.3) comparam-se as tensões em alguns pontos de integração, com o elemento tri-dimensional degenerado. Nesse caso, como no presente estudo, não se sabe precisamente como variam as tensões ao longo da espessura da casca de um ponto plastificado; no ponto próximo ao centro da casca, onde se comparam as tensões para a carga  $p = 57,5$  psi, pode-se supor que toda a secção relativa a esse ponto tenha atingido a plastificação.

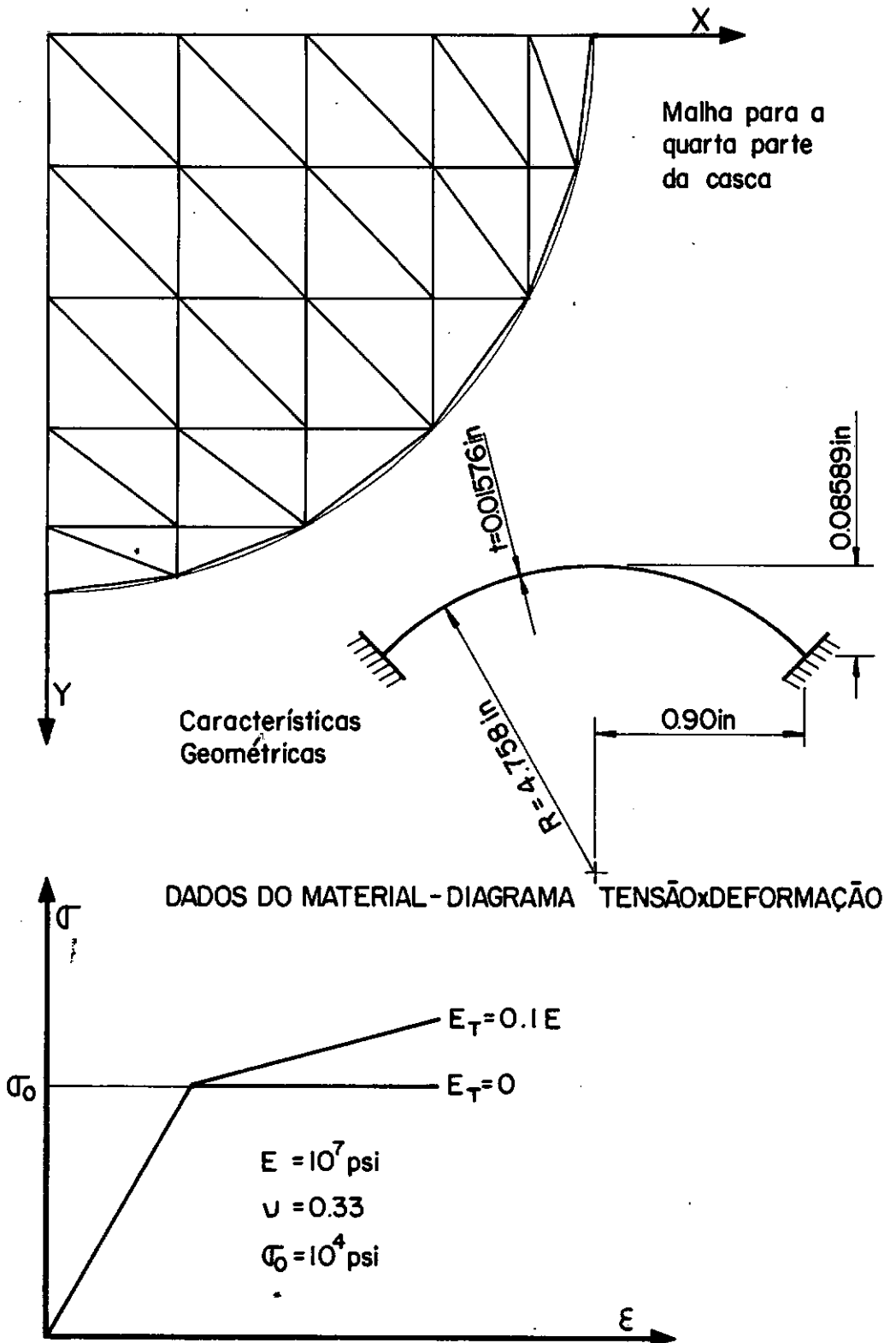


Figura V.8

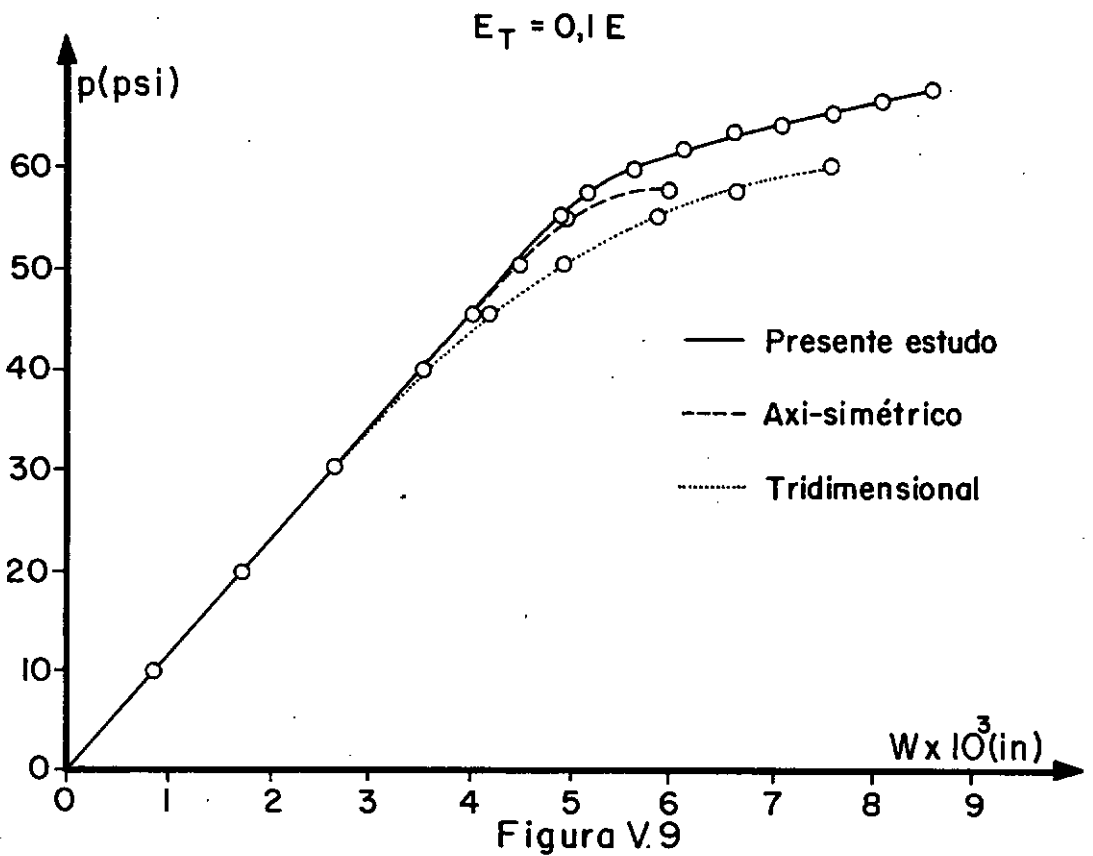
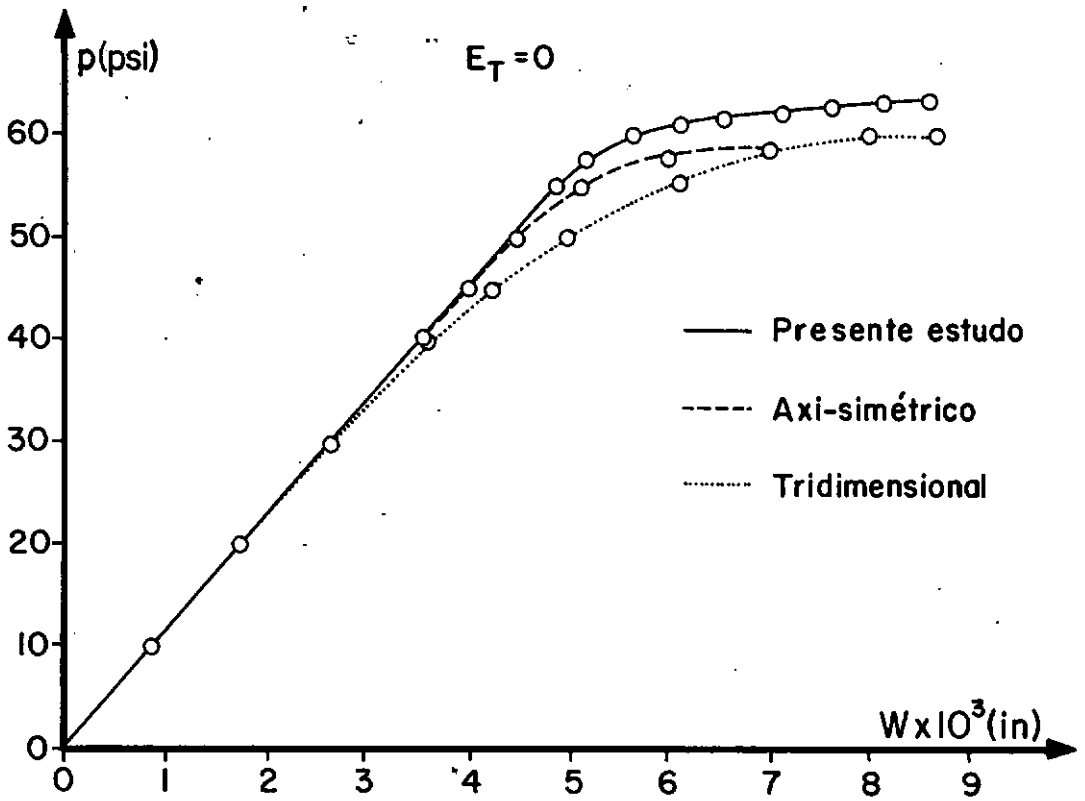


Figura V.9

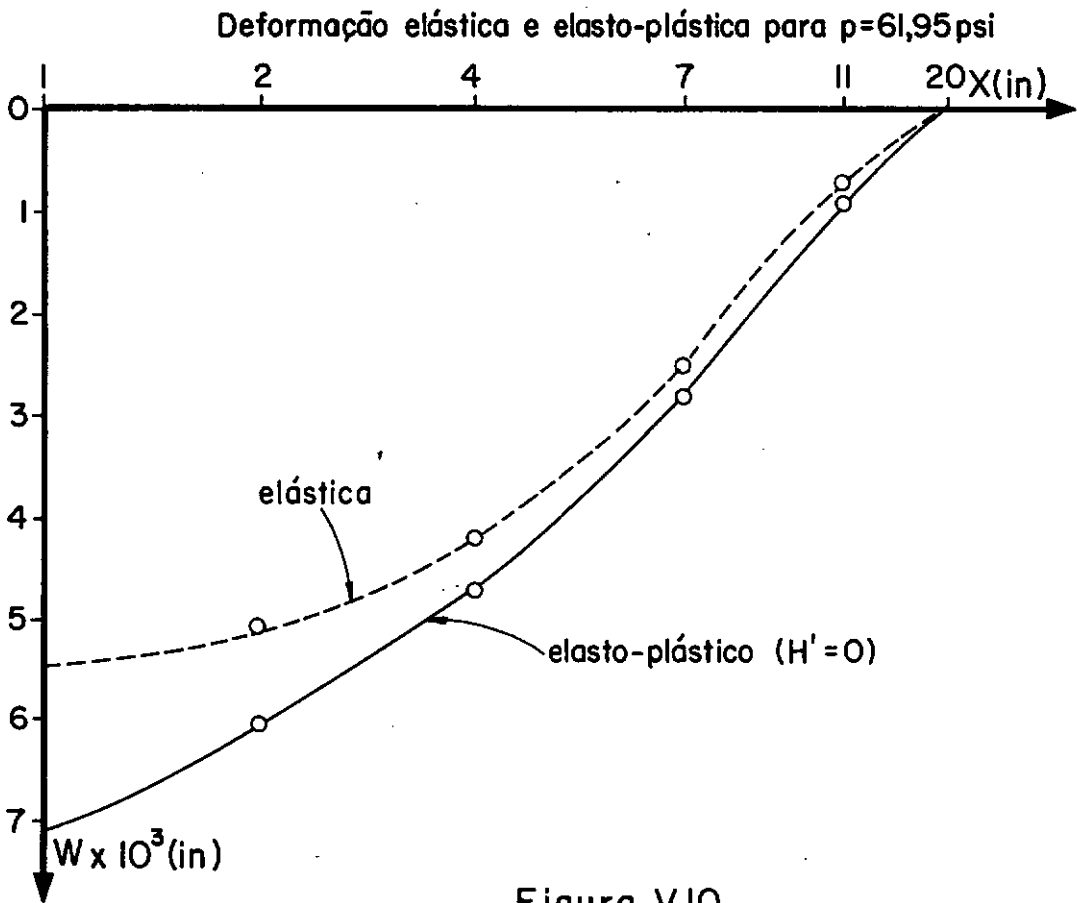
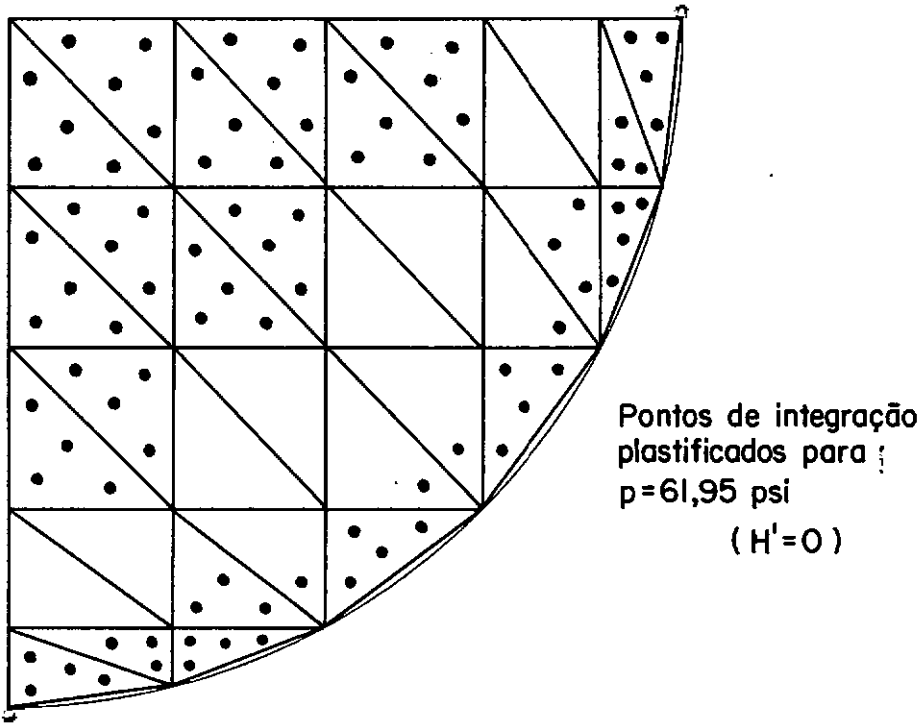


Figura V.10



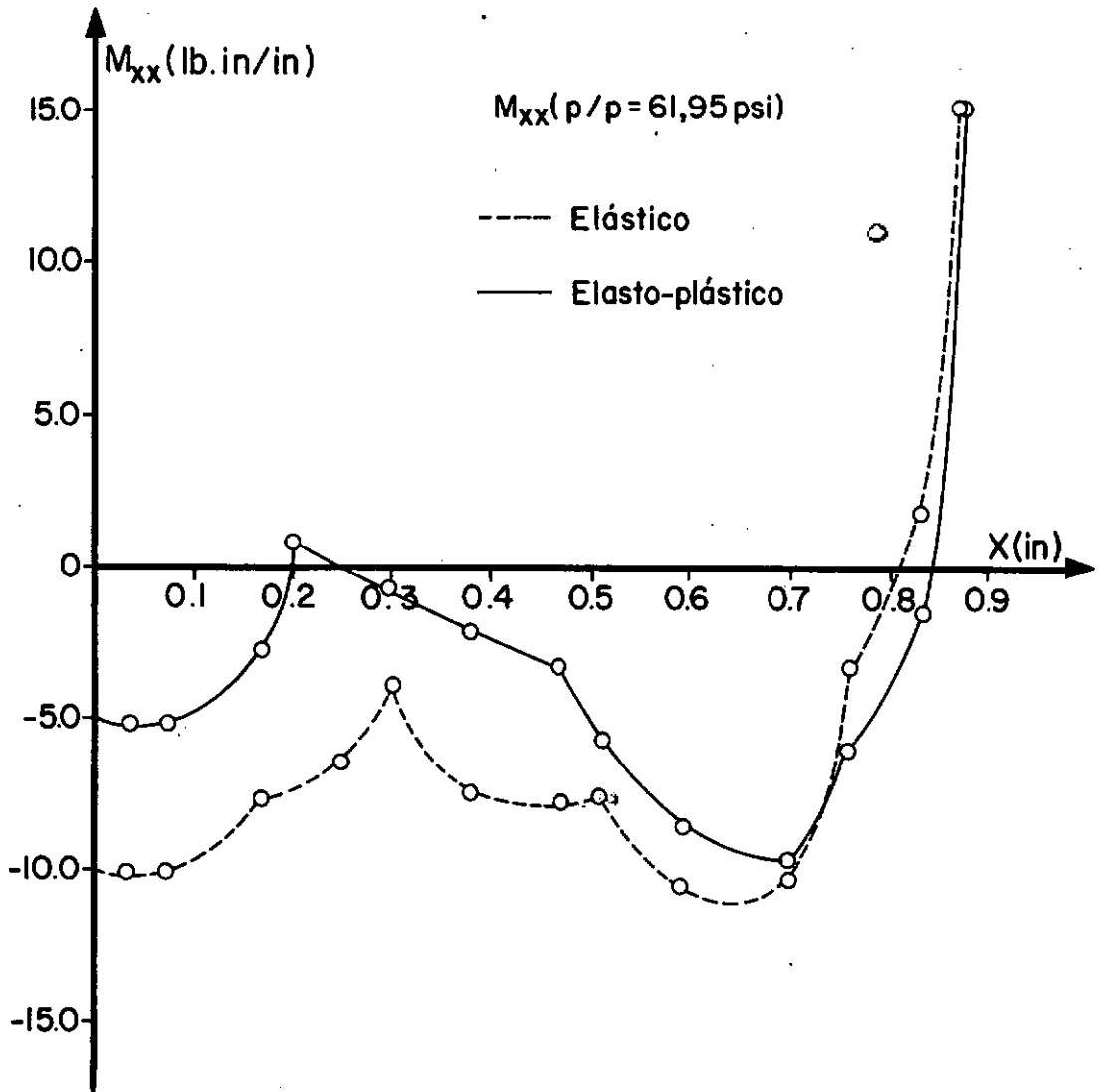


Figura V.II

Tabela (V.3) - Tensões na face superior dos pontos de integração próximos ao centro da casca em psi

p = 40 psi	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
Elemento estudado	- 8052.	- 8205.	+ 84.
Elemento tri-dimensional degenerado	- 8157.	- 8157.	+ 94.

p = 57.5 psi	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
Elemento estudado	- 10480.	- 10723.	+ 295.
Elemento tri-dimensional degenerado	- 9326.	- 10724	+ 357

## V.2 - ANÁLISE DINÂMICA

### a) Frequências naturais

#### VIGA ENGASTADA EM UMA EXTREMIDADE

A finalidade desse estudo é a comparação das frequências naturais de uma viga, calculadas com matriz de massa consistente, e matrizes diagonais agrupadas que levam em consideração uma parcela da inércia de rotação.

Calculam-se as primeiras frequências naturais de uma viga de secção retangular engastada em uma das extremidades. As características geométricas, bem como os dados relativos ao material da viga, são apresentados na Figura (V.12).

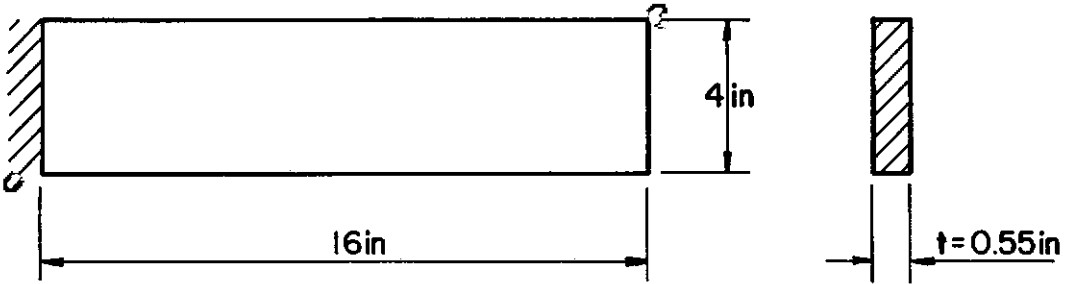
Esse exemplo foi resolvido por SURANA [40], que utilizou diversas malhas e espessuras diferentes para a viga, porém com um elemento tridimensional de casca com 16 nós.

No presente estudo, utilizaram-se as malhas I e II representadas na Figura (V.12), com a espessura da viga igual a 0.55 polegadas.

As quatro primeiras frequências naturais são apresentadas na Tabela (V.4), para a malha I, sendo que, para as matrizes agrupadas, faz-se a variação do coeficiente " $K_y$ ", que multiplica a soma das parcelas de rotação da matriz consistente, relativas ao grau de liberdade associado. Nas duas últimas colunas estão os valores da ref. [40] para matrizes de massa consistente e discreta, com uma malha de dois elementos tri-dimensionais de casca.

Na Tabela (V.5) tem-se as oito primeiras frequências naturais para a malha II, comparadas com as soluções de uma malha com oito elementos tri-dimensionais da referência [40].

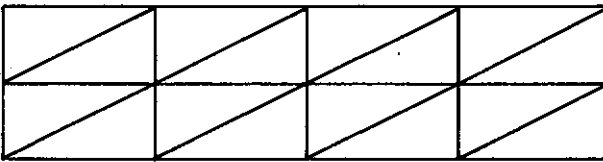
Observa-se que os valores obtidos para as diversas matrizes agrupadas não apresentam diferença significativa, tendo em vista que a viga possui pequena espessura.



$$E = 3 \times 10^7 \text{ lb/in}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\rho = 0.000728 \text{ lb s}^2/\text{in}^4$$



MALHA I

MALHA II

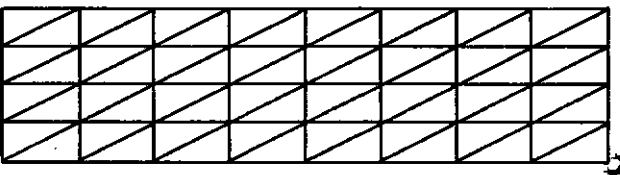


Figura V.12

Tabela (V.4) - Freqüências naturais (c.p.s.) - Malha I

Freqüências Naturais	Consistente	Discreta				Ref. [40]	
		$K_y=0.$	$K_y=0.45$	$K_y=0.75$	$K_y=1.0$	consistente	discreta
1	72.84	70.3	70.3	70.3	70.3	72.3	69.6
2	483.3	437.5	436.8	436.4	436.1	476.8	395.6
3	594.8	485.4	484.7	484.1	483.7	505.0	442.6
4	780.6	761.3	761.3	761.3	761.3	563.3	483.0

Tabela (V.5) - Frequências naturais (c.p.s.) - Malha II

Frequências Naturais	Consistente	Discreta		Ref. [40]	
		$K_y=0.$	$K_y=1.0$	consistente	discreta
1	71.8	71.3	71.3	71.5	70.8
2	457.0	445.2	444.8	447.4	431.3
3	583.0	549.6	549.0	492.9	487.6
4	584.6	580.6	580.6	550.9	514.5
5	1319.3	1264.5	1261.9	1281.5	1180.1
6	1811.7	1698.2	1695.4	1702.1	1579.2
7	2690.5	2554.3	2554.0	2698.6	2234.2
8	2932.2	2822.0	2822.0	3031.0	2746.3

b) Não-linearidade física

## PLACA ELASTO-PLÁSTICA SIMPLEMENTE APOIADA

A análise dinâmica de uma placa quadrada elasto-plástica perfeita apoiada nas extremidades, é feita utilizando-se matrizes de massa discretas e consistentes. As características do material, bem como a geometria da placa e o carregamento, estão na Figura (V.13).

Este problema foi resolvido por LIU e LIN [41] os quais utilizaram a teoria das pequenas deformações, e por HUGHES [42], que considerou também não-linearidade geométrica.

A resposta dinâmica para o elemento desenvolvido, utilizando matrizes de massa consistentes com quarenta intervalos de tempo, praticamente coincide com a solução através de matrizes de massa discretas para oitenta intervalos de tempo.

Na análise com as matrizes de massa consistentes, o máximo deslocamento vertical do ponto central da placa corresponde a  $2.86 \times 10^{-1}$  in, para  $t = 7.58 \times 10^{-4}$  s, enquanto que, com matrizes discretas, o valor máximo é de  $2.87 \times 10^{-1}$  in para o mesmo tempo. Nos dois casos, utiliza-se o método de integração de Newmark, atualizando-se a matriz de rigidez (não se verificando o equilíbrio em cada intervalo de tempo).

A solução obtida está indicada na Figura (V.14), que mostra a variação do deslocamento central da placa com o tempo, a qual é comparada aos resultados das referências [41] e [42].

Observa-se que, nessa análise, o deslocamento máximo alcança um valor maior e ocorre para um tempo superior do que as

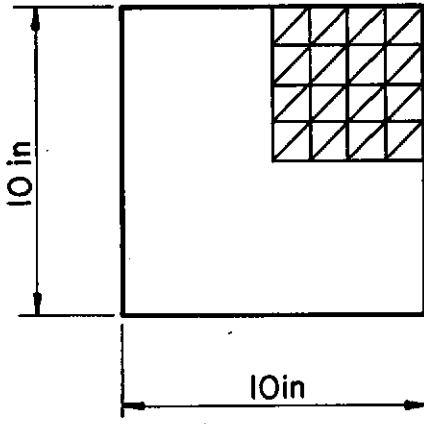
outras soluções. Isso pode ser consequência de um relativo atraso na plastificação dos pontos de integração, decorrente da superfície de escoamento aproximada que se utiliza na formulação.

Duas outras soluções análogas às anteriores foram obtidas, desta feita, verificando-se o equilíbrio a cada intervalo de tempo. Entretanto, esse procedimento exige grande esforço computacional, acarretando um alto tempo de processamento.

Quando, no entanto, não se atualiza a matriz de rigidez, mesmo verificando o equilíbrio podem ocorrer problemas de convergência. Utilizando-se, por exemplo, quarenta intervalos de tempo e atualizando a matriz de rigidez a cada cinco intervalos, não se consegue a convergência já nos primeiros intervalos.

Mesmo com oitenta intervalos de tempo, com matrizes consistentes de massa, contudo sem atualizar a matriz de rigidez, a solução é obtida até o tempo de  $4.46 \times 10^{-4}$  s, não convergindo para o intervalo posterior.





$$\begin{aligned}
 t &= 0.5 \text{ in (espessura)} \\
 E &= 10^7 \text{ psi} \\
 \nu &= 0.3 \\
 \rho &= 2.588 \times 10^{-4} \text{ lb sec}^2/\text{in}^4
 \end{aligned}$$

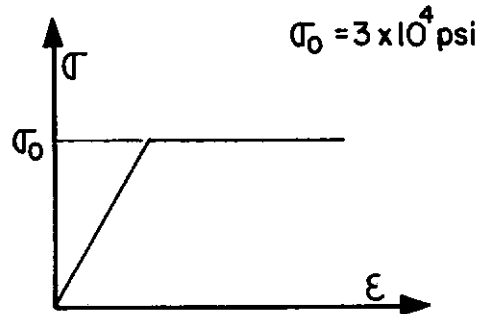


$$\Delta t = 2.23 \times 10^{-5} \text{ s (massa consistente)}$$

$$\Delta t = 1.115 \times 10^{-5} \text{ s (massa discreta)}$$

METODO DE INTEGRAÇÃO DE NEWMARK

"TENSÃO x DEFORMAÇÃO" DO MATERIAL



"CARGA x TEMPO"

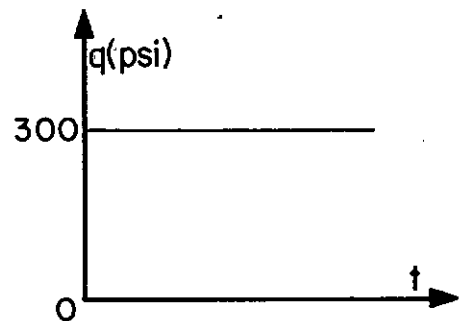


Figura V.13

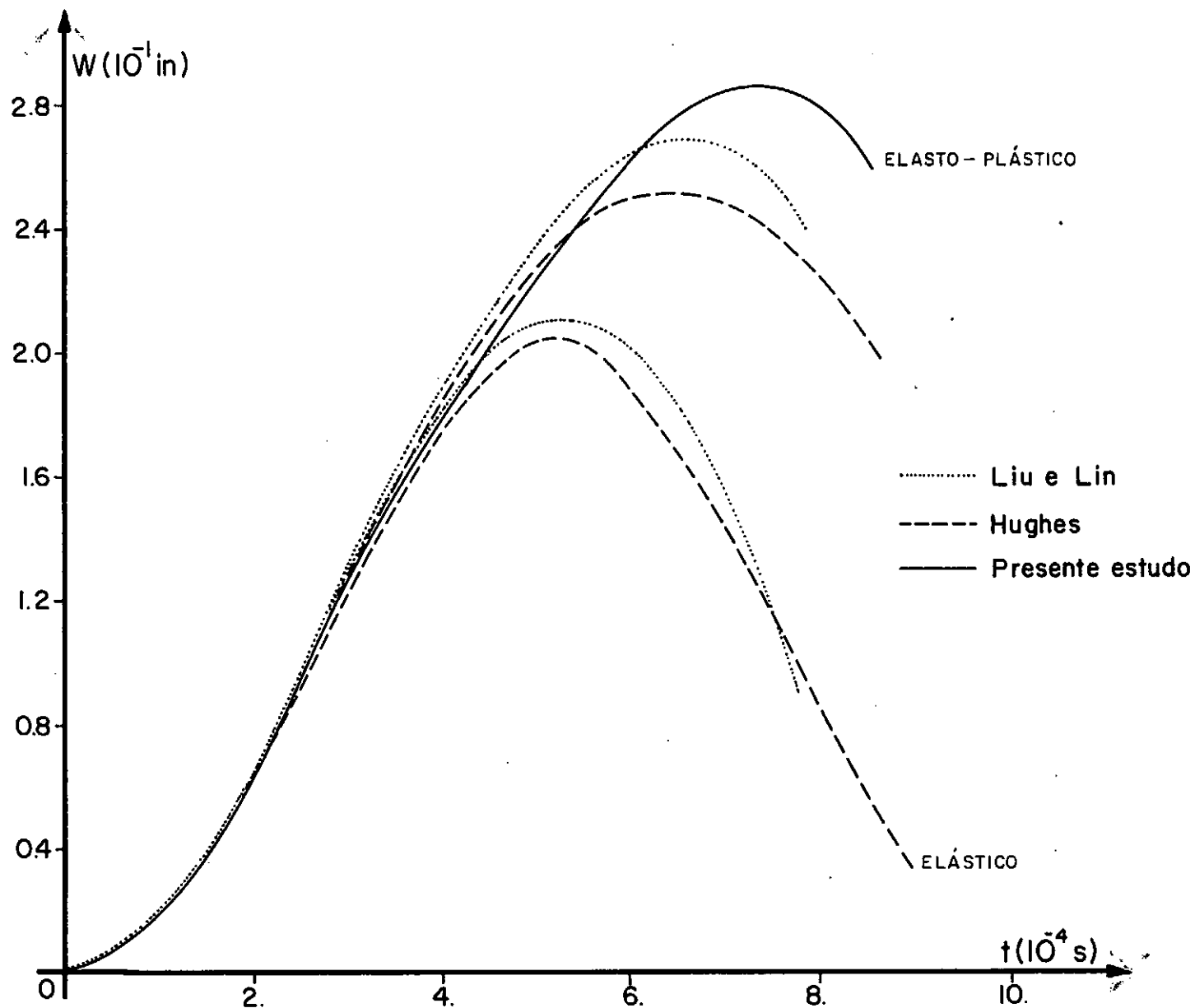


Figura V.14

## VI - CONCLUSÕES

Procurou-se examinar nesse trabalho o desempenho de uma formulação simples para análise não-linear de estruturas de superfície.

Estudou-se problemas de não-linearidade geométrica através das equações de von Kármán, utilizando-se uma regra de integração numérica adequada, para garantir a convergência das soluções de uma ampla classe de problemas práticos.

O tratamento da plasticidade a partir dos esforços é ainda assunto que merece pesquisa, e deve representar um caminho a ser seguido, já que reduz significativamente o esforço computacional na solução de problemas da engenharia.

Partindo-se então de um elemento simples, não conforme, desenvolveu-se um critério, que pode também considerar a possibilidade de endurecimento do material, através de integração apenas ao longo da superfície.

Esta formulação mostra-se eficiente quando comparada com teorias tridimensionais, as quais empregam o critério de von Mises em todo o domínio. Atualmente está sendo utilizada na solução de problemas mais complexos, como, por exemplo, na análise de resistência última de juntas tubulares [46].

Os procedimentos empregados estão implementados no sistema LORANE-NL com possibilidade de análises estáticas, com controle de deslocamentos e cargas, e análises dinâmicas, utilizando integração direta (implícita e explícita), como também superposição modal.

Dessa forma, pretende-se dar continuidade à pesquisa efetuando-se estudos de problemas de impacto, e adequando-se esse modelo para o tratamento de estruturas de concreto armado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1 ] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971.
- [ 2 ] NAYAK, G.C. e ZIENKIEWICZ, O.C., "A General Approach to Problems of Plasticity and Large Deformation Using Isoparametric Elements", Proc. Air Force Third Conf. Matrix Meth. Struc. Mech., Wrioth-Patterson A.F.B., Ohio, 1971.
- [ 3 ] LANDAU, L. e EBECKEN, N.F.F., "Análise Não-Linear de Estruturas de Superfície por Meio de Elementos Finitos Tridimensionais Degenerados", Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Civil, Caracas, 1975.
- [ 4 ] LANDAU, L., "Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1976.
- [ 5 ] EBECKEN, N.F.F., "LORANE-NL: Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1977.
- [ 6 ] PIETRUSZCZAK, S. e MROZ, Z., "Finite Element Analysis of Deformation of Strain-Softening Materials", Int. J.

Num. Meth. Eng., Vol. 17, pp. 327-334, 1981.

- [ 7 ] LIMA, S.R.F.F., "O Método dos Elementos Finitos Aplicado a Problemas de Cascas e Estruturas Laminares Utilizando-se Elementos Triangulares Planos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1972.
- [ 8 ] HINTON, E., ROCK, T e ZIENKIEWICZ, O.C., "A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, pp. 245-249, 1976.
- [ 9 ] KEY, S.W. e BEISINGER, Z.E., "The Transient Dynamic Analysis of Thin Shells by the Finite Element Method", Proceedings of The Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1971.
- [10] PRZEMIENIECKI, J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [11] HOLAND, I. e BELL, K., Finite Element Methods in Stress Analysis, Tapir, 1970.
- [12] BATOZ, J.L., BATHE, K.J. e HO, L.W., "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 15, pp. 1771-1812, 1980.
- [13] OLSON, M.D. e BEARDEN, T.W., "A Simple Flat Triangular Shell Element Revisited", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 14, pp. 51-68, 1979.
- [14] BRUCH, Y.A., "Análise Dinâmica de Placas pelo Método dos Elementos Finitos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1973.

- [15] HAMMER, P.C., MARLOWE, O.P. e STROUD, A.H., "Numerical Integration over Simplexes and Cones", Math. Tables Aids Comp., Vol. 10, pp. 130-137, 1956.
- [16] LANNON, F.G., "Triangular Finite Elements and Numerical Integration", Computers and Structures, Vol. 7, p. 613, 1977.
- [17] BREBBIA, C. e CONNOR, J., "Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis", J. Eng. Mech. Div., ASCE, 95, pp. 463-483, 1969.
- [18] BERGAN, P. e CLOUGH, R.W., "Large Deflection Analysis of Plates and Shallow Shells Using the Finite Element Method", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 5, pp. 543-555, 1973.
- [19] WROBEL, L.C., "Análise Não-Linear de Estruturas Laminadas pelo Método dos Elementos Finitos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1977.
- [20] HILL, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, 1950.
- [21] PRAGER, W., An Introduction to Plasticity, Addison-Wesley, Amsterdam and London, 1959.
- [22] COSTA, A.M., "Análise Dinâmica Elasto-Plástica de Transiente de Curta Duração Incluindo os Efeitos da Interação Solo-Fluido-Estrutura", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1978.
- [23] ROBINSON, M., "A Comparison of Yield Surfaces for Thin

Shells", Int. J. Mech. Sci., Vol. 13, pp. 345-354, 1971.

- [24] CRISFIELD, M.A., "Large-Deflection Elasto-Plastic Buckling Analysis of Plates Using Finite Elements", TRRL Report LR593, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, 1973.
- [25] \_\_\_\_\_, "On an Approximate Yield Criterion for Thin Steel Shells", TRRL Report LR658, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, 1974.
- [26] EIDSHEIM, O.M. e LARSEN, P.K., "A Study of Some Generalized Constitutive Models for Elasto-Plastic Shells", Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr - Universitat Bochum, Germany, 1980.
- [27] NAYAK, G.C. e ZIENKIEWICS, O.C., "Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 5, 1972.
- [28] OWEN, D.R.J. e HINTON, E., Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.
- [29] LEICESTER, R.H., "Finite Deformations of Shallow Shells", J. Eng. Mech. Div., ASCE, 94, pp. 1409-1423, 1968.
- [30] MATSUI, T. e MATSUOKA, O., "A New Finite Element Scheme for Instability Analysis of Thin Shells", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 145-170, 1976.
- [31] BERGAN, P.G., HORRIGMOE, G., KRAKELAND, B. e SOREIDE, T.H.,



- "Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 12, pp. 1677-1696, 1978.
- [32] DHATT, G.S., "Instability of Thin Shells by The Finite Element Method", IASS Symp. Folded Plates and Prismatic Struct., Viena, 1970.
- [33] BATHE, K.J. e BOLOURCHI, S., "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element", Computers and Structures, Vol. 11, pp. 23-48, 1980.
- [34] ARGYRIS, J.H., DUNNE, P.C., MALEJANNAKIS, G.A., e SCHELKLE, E., "A Simple Triangular Facet Shell Element with Applications to Linear and Non-Linear Equilibrium and Elastic Stability Problems", Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 10, pp. 371-403, e Vol. 11, pp. 97-131, 1977.
- [35] TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [36] DUPUIS, G.A., HIBBITT, H.D., McNAMARA, S.F. e MARCAL, P.V., "Nonlinear Material and Geometric Behaviour of Shell Structures", Computers and Structures, Vol. 1, pp. 223-239, 1972.
- [37] BACKLUND, J. e WENNERSTROM, H., "Finite Element Analysis of Elasto-Plastic Shells", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 8, pp. 415-424, 1974.
- [38] ARGYRIS, J.H., BALMER, H., KLEIBER, M e HINDENLANG, H., "Natural Description of Large Inelastic Deformations

for Shells of Arbitrary Shape-Application of TRUMP Element", Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 22, pp. 361-389, 1980.

- [39] LANDAU, L., WROBEL, L.C. e EBECKEN, N.F.F., "Elastic-Plastic Analysis of Shell Structures", Computers and Structures, Vol. 9, pp. 351-358, 1978.
- [40] SURANA, K.S., "Lumped Mass Matrices with Non-Zero Inertia for General Shell and Axisymmetric Shell Elements", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 12, pp. 1635-1650, 1978.
- [41] LIU, S.C. e LIN, T.H., "Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Structures Using Known Elastic Solutions", Earthquake Engineering and Structures Dynamics, Vol. 7, pp. 147-159, 1979.
- [42] HUGHES, T.J.R., LIU, W.K. e LEVIT, I., "Non-linear Dynamic Finite Element Analysis of Shells", Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr - Universitat Bochum, Germany, 1980.
- [43] CHEN, K.K., "A Triangular Plate Finite Element for Large - Displacement Elastic-Plastic Analysis of Automobile Structural Components", Computers and Structures, Vol. 10, pp. 203-215, 1979.
- [44] PARISCH, H., "Large Displacements of Shells Including Material Nonlinearities", Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 27, pp. 183-214, 1981.
- [45] BELYTSCHKO, T., MARCHERTAS, A.H., "Nonlinear Finite-Element Method for Plates and its Application to

Dynamic Response of Reactor Fuel Subassemblies",  
Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions  
of the ASME, pp. 251-257, 1974.

- [46] EBECKEN, N.F.F., LIMA, E.C.P., LANDAU, L. and CHUEIRI, L.H.M., "Analysis of the Static Strength of Tubular Joints", Proceedings of the International Conference held at Universidad Politecnica de Barcelona, Spain, pp. 421-431, edited by C. Taylor, E. Hinton, D.R.J. Owen, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1984.